Opiskelijoiden matemaattinen osaaminen tehostetun kisällioppimisen menetelmässä

Juulia Lahdenperä

Helmikuu 2015
Pro gradu -tutkielma
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty

Matemaattis-luonnontieteellinen

Laitos — Institution — Department

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Juulia Lahdenperä

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Opiskelijoiden matemaattinen osaaminen tehostetun kisällioppimisen menetelmässä

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Helmikuu 2015	69 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Tehostetun kisällioppimisen menetelmä on Helsingin yliopiston tietojenkäsittelytieteen laitoksella kehitetty oppimismenetelmä, jonka keskeisiä teemoja ovat tekemällä oppiminen, yhteisöllisyys ja asiantuntijaksi kasvaminen. Kisällioppimisen menetelmää on sovellettu matematiikan yliopisto-opetuksessa vuodesta 2011 lähtien.

Tässä tutkimuksessa käsitellään tehostetun kisällioppimisen menetelmän keskeisten osa-alueiden, kurssitehtävien tekemisen ja ohjaukseen osallistumisen vaikuttavuutta opiskelijan matemaattiseen osaamiseen. Matematiikan kielelliset elementit ja niiden hallinta ovat keskeisiä matematiikan osaamisen osa-alueita, ja matemaattisen kirjoittamisen arviointi antaa laajempaa tietoa opiskelijan matemaattisesta osaamisesta ja syvällisestä ymmärtämisestä. Matemaattisen osaamisen arvioinnissa käytettiinkin perinteisen matemaattisen sisällön arvioinnin lisäksi matematiikan kirjoittamisen arviointia. Arvioinnit suoritettiin kurssin Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I kurssikokeella, sekä arvioimalla yksi kurssikokeen tehtävistä matemaattisen kirjoittamisen osalta.

Kurssitehtävien tekemisen ja matemaattisen osaamisen välinen korrelaatio oli positiivinen sekä matemaattisen sisällön että matematiikan kirjoittamisen arvioinnin osalta. Kurssitehtävien tekemisen ja ohjaukseen osallistumisen välinen suhde ei ollut selkeästi havaittavissa. Ohjaukseen osallistumisen vaikuttavuus ei näkynyt suoraan kurssikokeella arvioidussa osaamisessa. Ohjaukseen aktiivisesti osallistuneet opiskelijat saivat kuitenkin keskimäärin 40 prosenttia enemmän kurssitehtäviä tehdyksi ja hieman parempia pisteitä matematiikan kirjoittamisen arvioinnissa kuin opiskelijat, jotka eivät osallistuneet ohjaukseen.

Tutkimus antoi lisätietoa tehostetun kisällioppimisen menetelmästä ja sen vaikuttavuudesta matematiikan yliopisto-opetuksessa. Tutkimustuloksia voidaankin hyödyntää jatkossa kisällikurssien suunnittelussa ja toteutuksessa.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Kielen rekisteri, matematiikan kieli, matematiikan yliopisto-opetus, tehostettu kisällioppiminen

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Kiitokset

Lämpimät kiitokset ohjaajalleni Juha Oikkoselle tuesta graduprosessin aikana. Erityisesti haluan kiittää kurssista Analyysi I syksyllä 2008 ja suunnan näyttämisestä yliopistomatematiikan kiehtovaan maailmaan. Sydämelliset kiitokset ohjaajalleni Johanna Rämölle erinomaisista kommenteista ja keskusteluista tutkimuksen toteuttamiseen ja raportointiin liittyen, sekä luottamuksesta ja kannustuksesta vuosien varrella. Haluan kiittää myös Taina Kaivolaa monista inspiroivista keskusteluista.

Kiitos Lotta Oinoselle, Thomas Vikbergille sekä kaikille kisällikurssien ohjaajille ja opiskelijoille ajatusten jakamisesta ja innostavan ilmapiirin luomisesta. Kiitos myös Aki Taanilalle Tilastoapu-blogista, joka tarjosi yleistajuista ensiapua aineiston tilastolliseen analysointiin liittyviin kysymyksiin. Kiitos myös Tapsulle oikoluvusta ja kommenteista.

Erityiskiitos Sebastianille aamupaloista, lounaista ja päivällisistä.

Sisältö

1 Johdanto

Tässä tutkimuksessa käsitellään tehostetun kisällioppimisen menetelmää ja sen eri osa-alueiden vaikuttavuutta opiskelijan matemaattiseen osaamiseen. Tutkielman keskeisiä teemoja ovat kurssitehtävät ja ohjaukseen osallistuminen. Erityisen mielenkiintoista on niiden suhde opiskelijoiden kykyyn ymmärtää käsiteltävät matemaattiset aihekokonaisuudet syvällisesti. Matemaattisen osaamisen arvioinnissa käytetään perinteisten menetelmien lisäksi matematiikan kirjoittamisen arviointia.

Tehostetun kisällioppimisen menetelmä on varsin tuore oppimismenetelmä: sitä on sovellettu matematiikan yliopisto-opetuksessa ensimmäisen kerran vuonna 2011. Menetelmän tuoreudesta johtuen aihetta on ehditty tutkia vasta vähän, ja täten tämän tutkielman aihe on erittäin ajankohtainen. Aihe on myös yleisesti kiinnostava: jo tehtyjen tutkimusten perusteella tehostetun kisällioppimisen menetelmällä on paljon potentiaalia matematiikan yliopisto-opetuksen kehittämisessä. Tutkielman tavoitteena onkin lisätä ymmärrystä tehostetun kisällioppimisen vaikuttavuudesta yliopisto-opiskelijoiden matemaattiseen osaamiseen.

Tutkimuksen taustaa ja teoreettista viitekehystä kartoitetaan luvuissa 1.1, 2 ja 3. Luvussa 2 keskitytään oppimiseen ja siihen liittyviin prosesseihin. Luvussa 3 esitellään Helsingin yliopiston tietojenkäsittelytieteen laitoksella kehitetty perinteiseen kisälli-oppipoikamalliin perustuva oppimismenetelmä tehostettu kisällioppiminen. Luku 3 käsittelee matematiikan kieltä ja sen suhdetta matematiikan syvälliseen ymmärtämiseen. Luvussa pohditaan myös matematiikan kieltä ja sen kirjoittamista tehostetun kisällioppimisen menetelmään näkökulmasta. Tutkimuksen toteuttaminen käydään läpi luvussa 4 ja tutkimustulokset esitellään luvussa 5. Lopuksi tutkimustuloksia pohditaan luvussa 6.

1.1 Taustaa

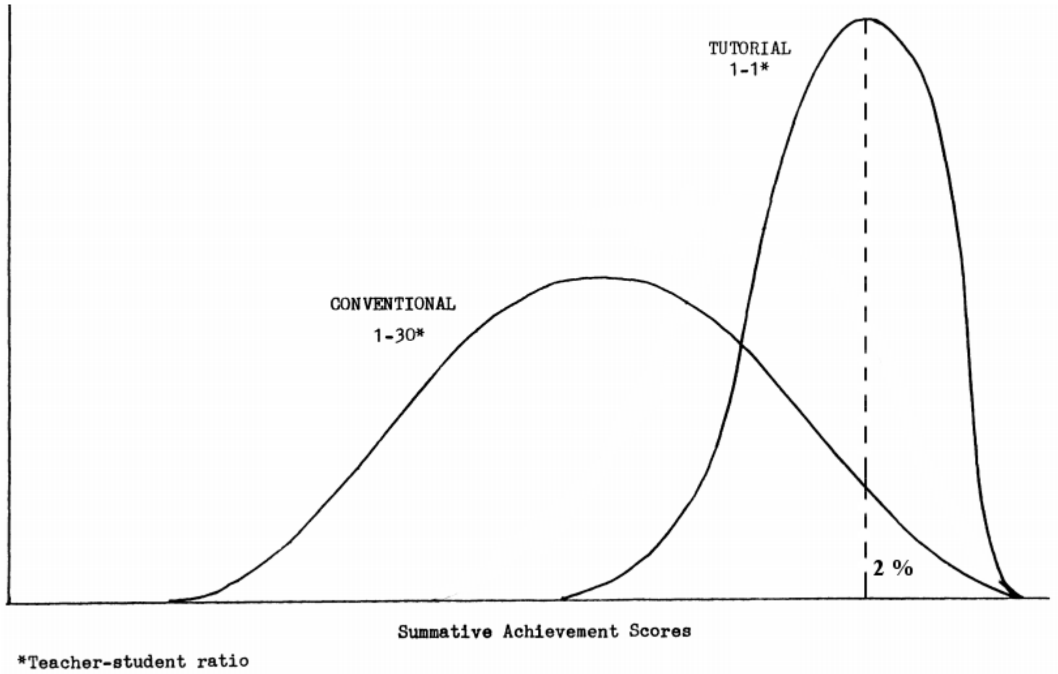
Oppimisen taito on ihmiselle hyvin luontainen ominaisuus: oppimista tapahtuu koko ajan. Yhtä kauan kuin on opittu, on myös opetettu. Ketosen (1984) mukaan *"[k]asvatusoppi on tieteenä suhteellisen nuori, mutta tarkoittavana toimintana kasvatus on kaikkia tieteitä vanhempi. Se on olennainen osa ihmisen pyrkimystä määrätä lajinsa kehityksen suuntaa."* Eri asia kuitenkin on se, miten helposti tai nopeasti jokin oppimisprosessi käynnistyy, saati on suoritettu loppuun. Ihmiskunta on oppinut hyvin paljon esimerkiksi matematiikasta, aikaa siihen on kulunut vain useampi vuosituhat. Tietyssä mielessä tutkijat jatkavat tai ainakin yrittävät jatkaa tämän kaltaista monien vuosien ja vuosikymmenten oppimisen perinnettä.

Ei ole kuitenkaan aina mielekästä vaatia oppijalta tällaista uraauurtavan tutkimuksen tekemistä. Siksi formaalin koulutuksen piirissä tarjotaan yleensä rajattuja aihesisältöjä, jotka oppijan tulisi omaksua. Opetuksen avulla pyritään positiivisesti myötävaikuttamaan näihin oppimis- ja omaksumisprosesseihin. Näistä vaikuttamisprosesseista on kehitetty monia teorioita ja malleja. Silti edelleenkään ei ole yhtä oikeaa ratkaisua siihen, mikä on paras tapa opettaa.

1980-luvun alussa Chicagon yliopistossa kaksi jatko-opiskelijaa tekivät Benjamin Bloomin ohjauksessa tutkimusta siitä, miten eri opetustavat vaikuttavat opiskelijoiden oppimistuloksiin. Opiskelijoiden lähtötaso ja asenteet olivat samat. Tutkimuksissa havaittiin, että keskiverron jatkuvaa henkilökohtaista ohjausta saaneen opiskelijan koetulokset olivat parempia kuin 98 prosentin perinteistä opetusta saaneiden opiskelijoiden vastaavat tulokset (kts. kuva 1) (Bloom, 1984). Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että jos perinteisessä opetuksessa sadan opiskelijan ryhmästä kaksi oppilasta suoriutuu erinomaisin tuloksin, henkilökohtaisessa ohjauksessa näistä sadasta opiskelijasta puolet eli 50 opiskelijaa pystyivät samaan. Tutkimus siis osoitti, että perinteisessä opetuksessa suurinta osaa opiskelijoiden oppimispotentiaalista ei käytetä hyödyksi. Opiskelijoilla olisi siis mahdollisuus saavuttaa huomattavasti parempi taitotaso, jos he saisivat oikeanlaista opetusta.

Vaikka henkilökohtainen ohjaus osoittautuikin oppimistulosten kannalta kaikista tehokkaimmaksi tavaksi oppia, kustannuksiltaan se on hyvin kallista ja vain harvalla instituutiolla on varaa sellaiseen. Erityisesti yliopisto-opetuksen haasteena on yhteiskunnallinen murros ja akateemisen tutkinnon suosio, ja tätä kautta taito- ja tuloksellisuusvaatimusten lisäksi opiskelijamäärien kohtuuton kasvu opettajaa kohden (Biggs, 2003, s. 2; Lindblom-Ylänne & Nevgi (toim.), 2009, s. 28, s. 320). Lisäksi yliopisto-opetukseen osallistuu taustaltaan, kulttuuriltaan ja taitotasoltaan yhä laajempi kirjo opiskelijoita (Biggs, 2003, s. 2). Näin ollen kurssien puitteissa on yhä haastavampaa luoda luottamuksellista ja integroitumista tukevaa oppimissuhdetta opiskelijoiden kanssa (Lähteenoja, 2010, s. 219).

Helsingin yliopiston matemaattis-luonnontieteellisessä tiedekunnassa massaluennot keskittyvät erityisesti opintojen alkuun. Tiedekunnan ensimmäisen



Kuva 1: Perinteisen opetuksen ja henkilökohtaisen opetuksen osaamistasojen erot (Peura, 2012; alkuperäinen kuva Bloom, 1984).

vuoden opiskelijat ovatkin vuorovaikutuksessa opettajien tai toisten opiskelijoiden kanssa vähemmän verrattuna Helsingin yliopiston valtiotieteellisen ja humanistisen tiedekunnan opiskelijoihin (Lähteenoja, 2010, s. 218). Yksi yliopiston perustehtävistä on kuitenkin antaa tutkimukseen perustuvaa ylintä opetusta (Yliopistolaki, 1. luku, 2§), jonka lisäksi Helsingin yliopiston opetuksen ja opintojen eettisissä periaatteissa todetaan:

> *Yliopiston tehtävä on järjestää opetus ja opiskelu niin, että opiskelija otetaan vastaan ja integroidaan yliopistoyhteisön jäseneksi* (Helsingin yliopisto, 2012, s.11).

Perinteinen luentoihin perustuva opetus ei välttämättä enää olekaan paras vaihtoehto keskeiseksi yliopisto-opetuksen menetelmäksi. Kysymys kuuluukin, kuinka sitten käytännössä järjestää opetusta, joka hyödyntää paremmin opiskelijoiden oppimispotentiaalia ja täyttää yliopiston perustehtävän, mutta on samalla kustannustehokasta ja mahdollista järjestää yhtä aikaa usealle sadalle opiskelijalle. Kognitiivinen kisälli-oppipoikamalli ja sen Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen sekä tietojenkäsittelytieteen laitoksilla käytössä oleva käytännön sovellus tehostettu kisällioppiminen antavat yhden vastauksen tähän kysymykseen.

2 Kisällioppiminen

Tässä kappaleessa esitellään eräs tällä hetkellä Helsingin yliopistossa käytössä oleva opetusmenetelmä. Tässä tutkielmassa kyseisen menetelmän teoreettisesta viitekehyksestä käytetään nimitystä *kognitiivinen kisälli-oppipoikamalli* (engl. *cognitive apprenticeship method*), ja sen käytännön sovelluksesta nimitystä *tehostettu kisällioppiminen* tai lyhyesti *kisällioppiminen* (engl. *extreme apprenticeship*). Tehostettu kisällioppiminen on Helsingin yliopiston tietojenkäsittelytieteen laitoksella vuonna 2010 kehitetty opetusmalli, joka korostaa tekemällä oppimisen ja jatkuvan palautteen keskeistä roolia oppimisessa (Vihavainen, Paksula & Luukkainen, 2011a; Vihavainen, Paksula, Luukkainen & Kurhila, 2011b). Positiivisista tuloksista innostuneena kisällioppiminen tuotiin vuonna 2011 myös matematiikan ja tilastotieteen laitokselle (Vikberg, 2012), jossa sitä on sovellettu useille kursseille.

2.1 Kisälli-oppipoikamalli

Jo muinaisista ajoista lähtien oppimista on tapahtunut oppipoika-periaatteella. Monia erityistä taidokkuutta vaativia ammatteja aina kuvanveistosta lääketieteeseen asti on opetettu ensin näyttämällä esimerkkiä jonkin prosessin suorittamisesta, ja sen jälkeen auttamalla oppijaa selviytymään siitä itsenäisesti. Se on toiminut tapana siirtää tietoa sukupolvesta toiseen (Collins, Brown & Holum, 1991). Halutessaan oppia tietyt taidot tai ammatin ihmiset ovat hakeutuneet oppiin nämä taidot omaavan henkilön luokse. Hyvänä esimerkkinä tämän kaltaisesta oppimisesta toimii räätälimestarin oppipojat. Jean Lave (myöh. Lave & Wenger, 1991, s. 69–72) tutki länsiafrikkalaisia räätäleitä, jotka oppivat räätälin taitonsa ompelimoissa seuraamalla ja harjoittelemalla räätälimestarin ohjauksessa. Schoenfeld (1989, s. 85–86) on tiivistänyt Laven huomiot seuraavasti:

> *Being a tailor is more than having a set of tailoring skills. It includes a way of thinking, a way of seeing, and having a set of values and perspectives. In Tailors' Alley, learning the curriculum of tailoring and learning to be a tailor are inseparable: the learning takes place in the context of doing real tailors' work, in the community of tailors. Apprentices are surrounded by journeymen and master tailors, from whom they learn their skills – and among whom they*

> *live, picking up their values and perspectives as well. These values and perspectives are not part of the formal curriculum of tailoring, but they are a central defining feature of the environment, and of what the apprentices learn. The apprentice tailors are apprenticing themselves into a community, and when they have succeeded in doing so, they have adopted a point of view as well as a set of skills – both of which define them as tailors.*

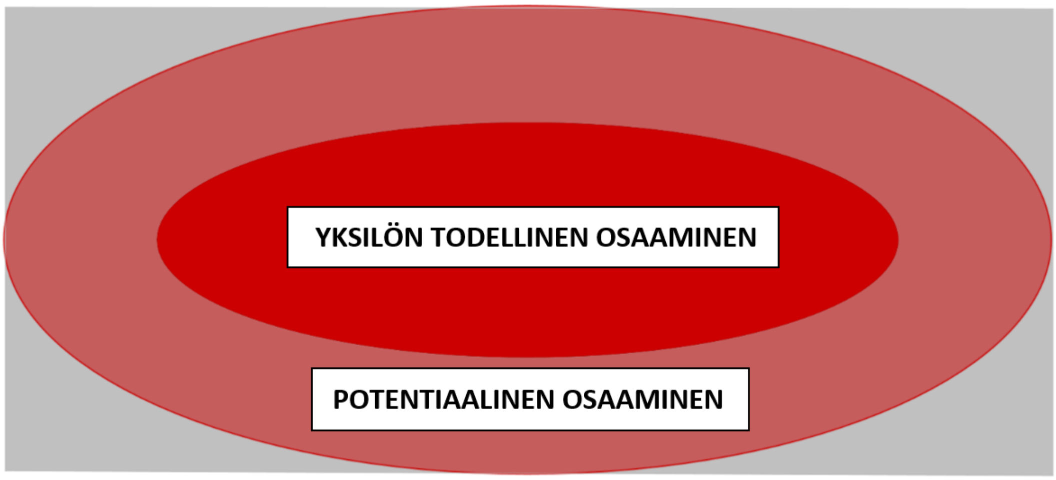
Mestari siis opettaa oppipojilleen räätälin ammatissa vaadittavia taitoja askel askeleelta samalla, kun he kasvavat osaksi räätälien yhteisöä ja omaksuvat siellä vallitsevan arvomaailman. Laven ja Wengerin (Lave & Wenger, 1991, s. 53, s. 85) mukaan pelkät proseduurilliset taidot eivät siis riitä, vaan räätälin määrittää sekä työssä vaadittavat taidot että tietty tapa katsoa maailmaa.

Toinen esimerkki oppipoika-periaatteella tapahtuvasta oppimisesta on pienen lapsen puhumaan ja toisten ihmisten kanssa vuorovaikutuksessa olemisen opettelu. Tällaiset tilanteet eivät vaadi formaalia koulutusta, vaan oppiminen tapahtuu havainnoimalla, harjoittelemalla ja tilannetta sopivasti yksinkertaistamalla erilaisia tehtäviä suorittaessa (Collins, Brown & Newman, 1987). Lapsi siis havainnoi ympäristöään ja yrittää toistaa kuulemiaan sanoja. Merkittävää tässä kommunikoinnissa on se, että lapselle puhutaan sellaisella tasolla, jonka hän voi oppia. Lapsi saa positiivista palautetta oppimistaan uusista sanoista, mikä samalla kannustaa häntä oppimaan lisää. Lapsen varttuessa kommunikointi muuttuu haasteellisemmaksi, ja vähitellen lapsi oppii sanomaan ensin kokonaisia lauseita ja lopulta hallitsemaan kielen eri vivahteita sekä monimutkaisia lauseita ja niiden merkityksiä.

Nämä molemmat esimerkit oppipoikana olemisesta ovat hyviä esimerkkejä Vygotskyn lähikehityksen vyöhykkeestä, jonka hän määrittelee seuraavasti:

> *...[T]he zone of proximal development [...] is the distance between the actual developmental level as determined by independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under adult guidance or in collaboration with more capable peers* (Vygotsky, 1978, s. 86.)

Lähikehityksen vyöhyke on siis se osaamisen taso, jota oppija ei kykene saavuttamaan itsenäisesti, mutta pystyy siihen toisen osaavamman henkilön ohjauksessa. Tätä kutsutaan yksilön potentiaaliseksi osaamiseksi. Tämä osaavampi



Kuva 2: Vygotskyn lähikehityksen vyöhyke.

yksilö, esimerkiksi jonkin käsityötaidon mestari, vanhempi, opettaja tai ystävä, rakentaa siltoja oppijan jo hallitseman materiaalin ja opittavan materiaalin välille. Oppimisprosessin edetessä myös lähikehityksen vyöhyke muuttuu: oppijan todellinen osaaminen on kasvanut, ja tällöin hänellä on potentiaalia ulottaa oppimistaan kauemmas kuin aikaisemmin (Lipscomb, Swanson & West, 2004; Vygotsky, 1931, s. 185). Vygotsky (1931) huomauttaa, että yhteistyössä tapahtuva jäljittely on oppimisen pääasiallisin muoto. Lisäksi oppija voi jäljitellä ainoastaan sellaista, mikä on hänen älyllisten mahdollisuuksiensa rajoissa (Vygotsky, 1931, s. 185–186). Näin ollen opetus on hyvää vain silloin, kun se kulkee sopivasti kehityksen edellä.

2.2 Kognitiivinen kisälli-oppipoikamalli

Perinteisessä oppipoikamallissa oppimisprosessit ovat näkyviä. Siispä esimerkiksi suutarimestari voi konkreettisesti näyttää, miten kengänvalmistuksen tiettyä vaihetta työstetään ja sen jälkeen ohjata kädestä pitäen, kun oppipoika pyrkii toistamaan saman perässä. Formaalin koulutuksen puitteissa oppiminen on kuitenkin suurimmaksi osaksi käsitteellistä ja keskittyy syvempiin kognitiivisen tason taitoihin. Kognitiivisen oppipoikamallin tarkoituksena onkin tehdä ajattelusta ja siihen liittyvistä prosesseista näkyviä (Collins ym., 1987; Collins ym., 1991). Lisähaastetta tuo se, että vaikka perinteisessä oppipoikamallissa opitut taidot ovat täysin tilannesidonnaisia, kognitiivisia taitoja tulee osata siirtää tarpeen tullen muihinkin tilanteisiin (Collins ym., 1991). Kognitiivisessa kisälli-oppipoikamallissa pyritäänkin tarkoituksenmukaisesti havainnollistamaan ajattelun kulkua, sekä antamaan oppijalle optimaalinen määrä ohjausta ja tukea (Collins ym., 1991). Collinsin ym. (1991) mukaan kognitiivinen kisälli-oppipoikamalli soveltuu erinomaisesti monisyisten asioiden kuten lukemisen, kirjoittamisen sekä matematiikan oppimiseen, sillä malli korostaa lopputuotteen sijaan siihen johtavaa prosessia.

Vihavainen kumppaneineen (2011a) jakaa kognitiivisen kisällioppimisen mallin Collinsia ja kumppaneita (1991) mukaillen kolmeen vaiheeseen: mallintamiseen (engl. modeling), oikea-aikaiseen tukemiseen (engl. scaffolding) ja taka-alalle siirtymiseen (engl. fading). Ensimmäisessä vaiheessa esimerkiksi luennoitsija havainnollistaa alan asiantuntijan tapaa ratkaista jokin ongelma. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että hän sanallistaa ongelmanratkaisuprosessinsa, jolloin mielessä liikkuvat ajatukset, mahdolliset valintatilanteet ja muut pohdinnat tulevat esiin ratkaisun edetessä. Seuraavassa vaiheessa opiskelija saa itse ratkottavakseen samankaltaisia ongelmia. Hän saa ohjausta juuri sen verran kuin tarvitsee Vygotskyn lähikehityksen vyöhykkeen periaatetta noudattaen. Ajatuksena on se, ettei opiskelijalle anneta suoraa vastausta, vaan autetaan juuri sen verran, että hän pääsee eteenpäin ja saa tehtävän lopulta tehdyksi. Kyseessä on siis väliaikainen tukirakenne, joka mahdollistaa oppimista lähikehityksen vyöhykkeellä. Alussa tukea on luonnollisesti enemmän, ja sitä säädellään oppimisen edetessä tarpeen mukaan. Tarkoituksena on, että oppipojasta tulee itsenäinen, eikä hän jää riippuvaiseksi mestaristaan. Kun aihekokonaisuus on hallussa, seuraa viimeinen vaihe, jossa ohjaaja vetäytyy taka-alalle opiskelijan kyetessä itsenäiseen ammattimaiseen suoritukseen. (Collins ym., 1991; Vihavainen ym., 2011a; 2011b.)

Tärkeää kognitiivisessa kisällioppimisessa on myös sen sosiaalinen konteksti (Collins ym., 1991). Kuten Lave edellä toteaa, pelkät proseduurilliset taidot eivät riitä kokonaisvaltaisen ammattitaidon saavuttamiseksi, vaan lisäksi tarvitaan alalle tyypillisiä arvoja ja näkökulmia. Jotta oppipoika kasvaisi ammattiyhteisön täysivaltaiseksi jäseneksi, oppipojan tulee oppia, kuinka alan asiantuntija ajattelee. Sekä Collinsin kumppaneineen (1991) että Kurhilan ja Vihavaisen (2011) mielestä se on luonnollisinta kyseisessä asiantuntijoiden yhteisössä. Sosiaalisen kontekstin lisäksi Collinsin ja kumppaneiden (1987; 1991) mukaan kisällioppimisen mallin eri osa-alueiden välinen vuorovaikutus on erityisen tärkeää. Heidän mielestään havainnoiminen, tuen saaminen ja kasvavassa määrin itsenäinen työskentely auttaa oppijaa havainnoimaan omaa oppimistaan ja tätä kautta korjaamaan mahdollisia virhekäsityksiään, sekä integroimaan tilannesidonnaiset tiedot ja taidot aikaisempaan osaamiseensa. Osa-alueiden välinen vuorovaikutus on siis välttämätöntä asiantuntijaksi kasvamisessa (Collins ym., 1987; 1991).

Matematiikassa ja yleisestikin ongelmaratkaisussa kaikki ajattelu tehdään piilossa, minkä tuloksena syntynyt ratkaisu tiettyyn kysymykseen ei välttämättä kerro paljoakaan itse ajatteluprosessista. Kognitiivinen oppipoikamalli pureutuu juuri tähän ongelmaan. Schoenfeldin (1985) mukaan kaavojen mekaaninen soveltaminen ja symbolien käsittely ovat matematiikan työkaluja. Aivan kuten pelkät tekniset taidot tai työkalujen hallinta eivät vielä tee yksilöstä asiantuntijaa, näiden matemaattisten työkalujen täydellinenkään hallinta ei takaa syvempää matemaattista ymmärrystä (Schoenfeld, 1985). Kognitiivisen kisällioppimisen haasteena onkin kehittää sellaisia tehtäviä, joiden ratkaiseminen on oppimisen kannalta olennaista (Vikberg, 2012).

2.3 Tehostettu kisällioppiminen

Tehostettu kisällioppiminen on kognitiiviseen kisälli-oppipoikamalliin perustuva käytännön sovellus, joka painottaa opiskelijan omaa panosta ja oppimisen tukirakenteiden tärkeyttä. Se kehitettiin Helsingin yliopiston tietojenkäsittelytieteen laitoksella vähentämään yliopistopudokkaiden määrää ja parantamaan oppimistuloksia. (Vihavainen ym., 2011a.) Vihavainen ja kumppanit (2011a) ovat sitä mieltä, että ohjelmoinnin oppiminen tapahtuu parhaiten tietokoneen ääressä ohjelmoimalla. Näin ollen tietojenkäsittelytieteen laitoksen tehostetun kisällioppimisen kursseilla opetus tapahtuu tietokoneluokissa, jossa kurssin ohjaavat opettajat kiertelevät auttamassa henkilökohtaisesti apua tarvitsevia opiskelijoita.

Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksella Vikberg (2012) on pro gradu -tutkielmassaan tutkinut kisälliopetusta saaneiden ja perinteisestä luento-opetusta saaneiden saman kurssin (Logiikka I) koetuloksia. Kurssilla oli kaksi neljän tehtävän koetta, eli yhteensä kahdeksan tehtävää, joista seitsemässä kisälliopetusta saaneet suoriutuivat verrokkiryhmäänsä paremmin (kts. kuva 3). Vikberg toteaakin tehostetun kisällioppimisen soveltuvan erinomaisesti myös matematiikan yliopisto-opetukseen.

Figure 9: Average points of exam questions for those students taking part in the mid-term exam of Logic I.

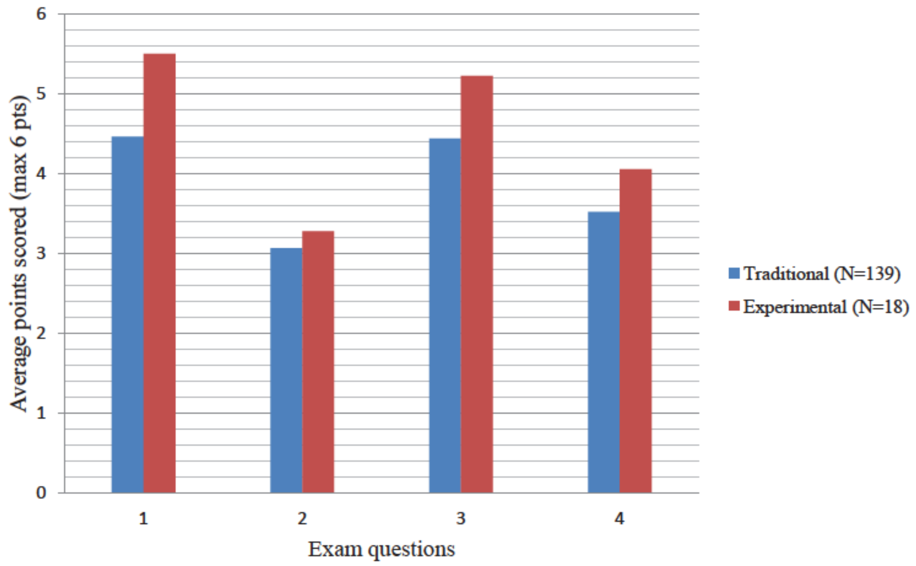
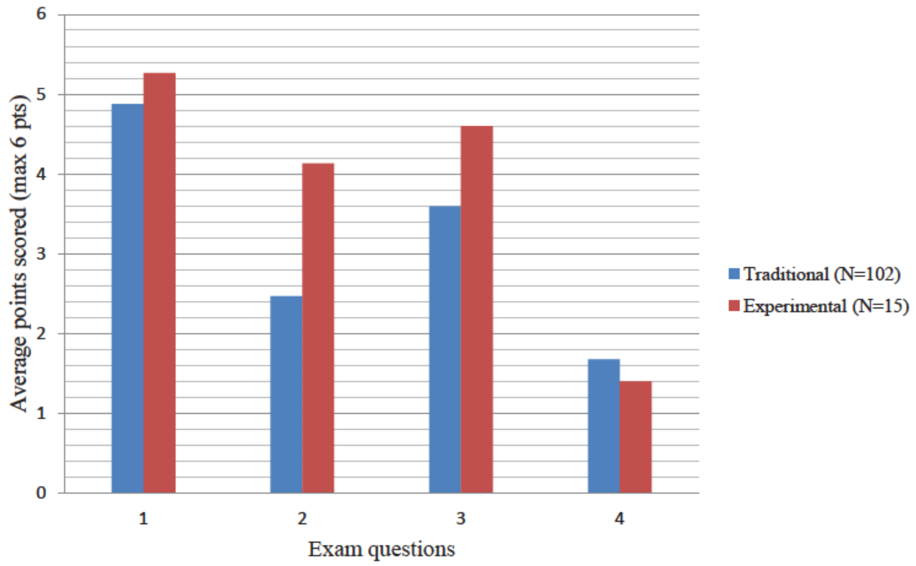
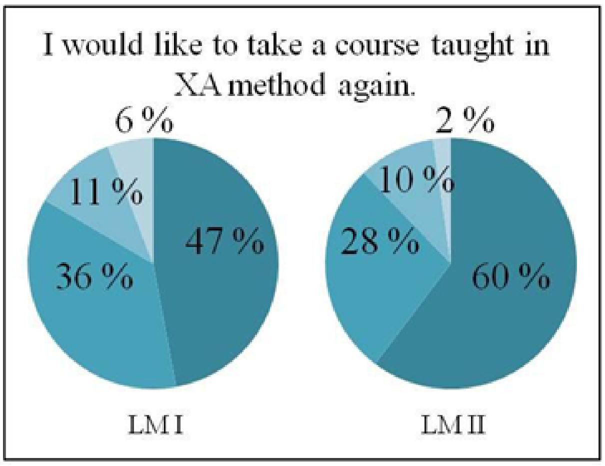


Figure 10: Average points of exam questions for those students taking part in the end-term exam of Logic I.



Kuva 3: Kisälliopetukseen (experimental) ja perinteiseen luento-opetukseen (traditional) osallistuneiden opiskelijoiden väli- ja loppukoetulokset tehtävittäin (Vikberg 2012).

Positiivisia tuloksia on saatu myös muilta kisällioppimisen menetelmällä järjestetyiltä matematiikan kursseilta. Hautalan, Romun, Rämön ja Vikbergin (2012) kursseilla Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I ja II tekemä tutkimus osoitti, että käytetty menetelmä nosti opiskelijoiden itseluottamusta itsenäisinä matematiikan opiskelijoina. Tutkimustuloksissa huomattavaa oli myös se, että vaikka kurssin vaatimustasoa nostettiin ja itsenäisen työn määrä kasvoi huomattavasti, opiskelijat pitivät opetusmenetelmästä ja toivoivat menetelmää käytettävän muillakin matematiikan kursseilla (kts. kuva 4).



Kuva 4: Yli 80 prosenttia opiskelijoista haluaisi opiskella kisällioppimisen menetelmällä jatkossakin (Hautala ym., 2012).

Tällä hetkellä Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksella tehostetun kisällioppimisen menetelmää on käytetty kursseilla Johdatus yliopistomatematiikkaan, Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I ja II, Algebra I, Logiikka I, Differentiaaliyhtälöt sekä Johdatus todennäköisyyslaskentaan. Kisällikurssien opetus on järjestetty siten, että viikoittainen tehtävien tekeminen on noussut ykkössijalle ennen luentoja (Hautala ym., 2012). Tarkoituksena on vähentää opiskelijan passiivista osallistumista ja rohkaista aktiiviseen opiskeluun.

Laitoksella on ohjaussali, johon opiskelijat voivat tulla ratkomaan viikoittaisia tehtäviä. Luokassa on myös ohjaajia, jotka aktiivisesti tarjoavat tukea sitä tarvitseville. Tehtävien ohjaamisella on erittäin tärkeä rooli: se on opiskelijalle tukemisen näkyvin muoto. Hautala ja kumppanit (2012) huomauttavatkin, että henkilökohtaisen ohjauksen osallistumiskynnyksen madaltamiseen on kiinnitetty erityistä huomiota. Tavoitteena on, että jokaiselle opiskelijalle annetaan sen verran aikaa ja tukea kuin hän tarvitsee hallitakseen tietyn aihekokonaisuuden, jolloin hän monien oppimissyklien jälkeen tulee kurssin aihepiirien asiantuntijaksi (Vihavainen ym., 2011a).

Vihavainen ja kumppanit (2011a) painottavat sitä, että jatkuva palaute on oppimisprosessille ehdottoman tärkeää. Se on keskeistä myös kurssin ohjaajille – sen avulla he pystyvät säätelemään antamaansa tukea ja muokkaamaan ohjaustaan oikeaan suuntaan. Ohjaajat keräävät kurssin kuluessa palautetta myös siitä, mitkä aiheet ovat olleet erityisen hankalia. Tämä palaute ohjataan kurssin vastuuopettajalle, joka pystyy saamaansa palautetta hyödyntäen muokkaamaan luentojaan ja laatimaan uusia soveltuvampia tehtäviä (Hautala ym., 2012). Tehtävät siis määrittävät luennot, ei toisin päin (Vikberg, 2012). Tehostetussa kisällioppimisessa painottuukin tehtävien laadinta sekä niiden ohjaaminen ja arviointi (Vihavainen ym., 2011a).

Tehtävien laatimisessa tulee ottaa huomioon kurssin aihe- ja kognitiiviset sisällöt. Hautalan ja kumppaneiden (2012) mukaan tehtävien avulla opiskelijat tutustutetaan uusiin käsitteisiin ja aihealueisiin, syvennetään aikaisemmin opittua sisältöä ja luodaan uusia yhteyksiä oppisisältöjen välille. Lisäksi tehtävien kautta opitaan mekaanisten taitojen ja laskurutiinin lisäksi oman oppimisen analysointia ja artikuloimista (Hautala ym., 2012). Tehtävät ovat onnistuneita silloin, kun opiskelija kokee ne miellyttävän haastaviksi (Vikberg, 2012). Opiskelijat palauttavat tehtävät tarkastettavaksi, ja kurssin vastuuopettaja ohjaajien kanssa kommentoi opiskelijoiden ratkaisuja. Tehtävät palautetaan takaisin opiskelijoille joko hyväksyttyinä tai korjausta vaativina. Korjausmahdollisuuden tarjoamisella pyritään tukemaan mahdollisten virhekäsitysten korjaantumista (Hautala ym., 2012).

Ohjaajat ja kurssien vastuuopettajat kokoontuvat viikoittain jakamaan ajatuksia kurssista ja sen kehittämiseen liittyvistä asioista. Kurssit ovat siis erittäin dynaamisia ja ne kykenevät muokkautumaan tarpeen tullen tarvittavaan suuntaan. Tämä on kisälliopettamisen ehdoton etu perinteiseen luento-opettamiseen verrattuna (Vikberg, 2012). Yhteenvetona voidaankin sanoa, että tehostetun kisällioppimisen menetelmän tavoitteena on haastaa opiskelijat oppimaan oivaltamisen kautta ulkoa opiskelemisen sijaan. Samalla, kun ohjaaja kannustaa ja tukee opiskelijoiden oppimista, opiskelijoiden esittämät kysymykset antavat hänelle uusia näkökulmia opiskeltavaan sisältöön. Kisällioppiminen on siis vuorovaikutussuhde, joka hyödyttää sen kaikkia osapuolia.

3 Matematiikan kirjoittaminen

Modernit näkökulmat oppimiseen tunnustavat kielen tärkeyden oppimisprosesseissa sekä tiedon rakentumisessa, jäsentymisessä ja raportoimisessa. Seuraava artikkelikatsaus osoittaakin, että matematiikan puhuminen, lukeminen ja kirjoittaminen – siis matematiikan kieli – on tärkeä osa matematiikan oppimista.

Tässä kappaleessa kartoitetaan matematiikan, kielen ja oppimisen välistä suhdetta. Ensin tarkastellaan sitä, mitä matematiikan kielellä oikein tarkoitetaan. Tämän jälkeen pohditaan, miten matematiikan kielellinen osaaminen vaikuttaa matematiikan syvälliseen ymmärtämiseen ja todistamisen taitoon. Lopuksi käsitellään sitä, miten matematiikan kieli ja sen hallitseminen resonoi tehostetun kisällioppimisen menetelmän kanssa.

3.1 Matematiikan kieli

Matematiikan sanotaan usein olevan universaali, symbolinen kieli. Matematiikkaa ei tarvitse oppia uudestaan, vaikka ympäristön kieli muuttuisikin. Kysymykseen ”Onko matematiikka todella kieli” voidaan kuitenkin vastata monella eri tavalla. Wagnerin (2009) mukaan ihmiset ymmärtävät matematiikkaa globaalisti, sillä he jakavat yhteisen kokemuksen luonnossa esiintyvistä jaksollisuuksista sekä halun niiden järkeistämiselle. Lisäksi Vygotsky (1931, s. 18–19) huomauttaa, että kieli on ennen kaikkea sosiaalisen kanssakäymisen väline: se yhdistää sekä viestinnän että ajattelun funktiot. Näin ollen Wagnerin (2009) näkemys siitä, että matematiikkaa voidaan käsitellä kielenä, koska ymmärtäminen on yksi kielen peruspilareista, on perusteltu.

Jos matematiikka koostuisi pelkästään uusista sanoista ja symboleista, se olisi vain jo jonkin olemassa olevan kielen laajennus. Krusselin (1998) mukaan matematiikalla on kuitenkin oma syntaksinsa ja kielioppinsa, joten sitä tulisi käsitellä uutena, erillisenä kielenä. Usiskin (1996) on samaa mieltä. Hän kuitenkin huomauttaa, että kun matematiikan sanotaan olevan kieli, useimmiten tarkoitetaan, että matematiikka on kuten kielet. Myös Pimm (1987) argumentoi sen puolesta, että matematiikka on kieli – joskin metaforisella tasolla:

> *. . . [M]athematics can be profitably seen as both medium and message, with the two often inextricably and deliberately mixed* (Pimm,

1987, xvii).

Usiskinin (1996) mukaan matematiikkaa voidaan siis käsitellä kielenä siinä missä suunnikasta voidaan käsitellä nelikulmiona, ja kommunikaatio on yksi matematiikan kielen tärkeimmistä tavoitteista. Hän kuitenkin huomauttaa, että matematiikka ei ainoastaan kuvaile käsitteitä, vaan auttaa niiden hahmottumista matematiikan käyttäjän mielessä. Näin ollen matematiikalla on, kuten kaikilla muillakin kielillä, omat ainutlaatuiset ominaispiirteensä (Usiskin, 1996).

Halliday (1978, s. 195, s. 202) puolestaan tarkoittaa matematiikan kielellä matemaattista rekisteriä, siis luonnollista kieltä käytettynä matemaattisessa kontekstissa, ei matemaattisia symboleita tai matematiikkaa itsessään. Hän määrittelee kielen rekisterin seuraavasti:

> *It is the meanings, including the styles of meaning and modes of argument that constitute a register* (Halliday, 1978, s. 195).

Näin ollen kielen rekisteri ei muodostu pelkästään luomalla uusia määritelmiä ja uutta terminologiaa. Pimm (1987, s. 207) on samaa mieltä. Hänen mukaansa kirjoitetussa matematiikassa luonnollisen kielen lisäksi läsnä oleva symbolinen aspekti, symbolin ja objektin käsitteiden sekoittuminen sekä itse matemaattisten objektien abstraktius vievät matematiikkaa pelkkää terminologiaa ja määritelmiä syvemmälle, ja tukevat näin matematiikan käsitystä kielenä.

Usiskin (1996) pohtii matematiikan kieltä myös yleisen kielitieteen näkökulmasta. Eräs suurimmista eroista, joita hän löytää matematiikan ja luonnollisten kielten välillä on se, että matematiikan kieltä ei yleensä opita ensisijaisesti puhuttuna kielenä. Tästä johtuen matematiikan oppimisessa ei ole aikaisemmin painotettu suullista kommunikaatiota. Tämä saattaa olla myös syy siihen, miksi kielitieteilijät eivät hyväksy matematiikkaa kieleksi. Hallidayn (1978, s. 201) mukaan lapsilla on kuitenkin luontainen taipumus järjestää ympäristöään systemaattisesti, mikä on pohjimmiltaan matemaattinen operaatio. Hän huomauttaakin, että matematiikan kieltä aletaan oppia jo varhain yhtä aikaa luonnollisen kielen kanssa. Usiskinin (1996) mukaan ongelmaksi on muodostunut se, että matematiikkaa ajatellaan helposti joko liian erityisenä kielenä tai ei kielenä ollenkaan. Hän toteaa, että todellisuudessa matematiikalla on kielten kanssa paljon enemmän yhtäläisyyksiä kuin eroja.

Jos matematiikkaa voidaan ajatella kielenä kuten vaikkapa englantia, miksi sitä on sitten niin vaikea oppia? Usiskinin (1996) mukaan syitä tähän on useita: se ei ole kenenkään äidinkieli, se opitaan lähes pelkästään koulussa eikä sitä puhuta kotona välttämättä laisinkaan. Kaiken lisäksi vieraiden kielten oppiminen on ylipäätään haastavaa (Usiskin, 1996). Usiskin (1996) kysyykin, pitäisikö lapsen kielellisen herkkyyden ikää käyttää hyväksi myös matematiikan opetuksessa tutustuttamalla oppilaat matemaattisiin käsitteisiin jo nykyistä varhaisemmassa vaiheessa.

Tutkijat ovat siis selvästi yhtä mieltä siitä, että matematiikassa on paljon kielellisiä elementtejä. Pimm (1987, s. 44) ja Usiskin (1996) ovatkin sitä mieltä, että tutkimustietoa ja toimiviksi havaittuja käytänteitä kielten oppimisesta tulisi käyttää hyväksi myös matematiikan opetuksessa ja oppimisessa. Heidän mukaansa samalla myös viestintä ja kommunikaatio tulisi ottaa keskeisiksi osiksi matematiikan opetusta. Pimm (1987, s. 202–203) onkin sitä mieltä, että matematiikan kielen kaltaisella käsittelyllä saadaan uutta tietoa ja tuoretta näkökulmaa matematiikan oppimiseen ja opettamiseen.

3.2 Matematiikan kirjoittaminen ymmärtämisen tukena

Vygotskyn (1931, s. 177) mukaan kirjoitettu kieli eroaa puhutusta kielestä sekä rakenteeltaan että toimintatavaltaan: käsitteellisyydestä ja vuorovaikutuksen puutteesta johtuen kirjoitettu kieli vaatii puhuttua kieltä korkeamman abstraktiotason. Tutkielman tässä osassa käytetyssä lähdekirjallisuudessa matematiikan kirjoittaminen ymmärretään laajasti. Matematiikan kirjoittamisella ei tarkoiteta pelkästään formaalia, esimerkiksi todistuksissa käytettävää matemaattista tekstiä, vaan kirjoittamista ajatellaan matemaattisten prosessien selittämisenä ja avaamisena eri menetelmin. Joutsenlahti (2010) käyttää suomenkielistä termiä matematiikan kielentäminen, jolla hän tarkoittaa matemaattisen tiedon työstämisprosessin ilmaisemista kielen avulla joko suullisesti tai kirjallisesti. Tämä määritelmä vastaa muissa lähteissä käytettyä englanninkielistä termiä mathematical writing (mm. Aspinwall ja Aspinwall, 2003; Adu-Gyamfi Bossé & Faulconer, 2010; McCormick, 2010; Pugalee, 2001), joten tästä eteenpäin tutkielmassa puhutaan kielentämisestä Joutsenlahden (2010) määritelmän mukaisesti myös englanninkieliseen lähdekirjallisuuteen viitatessa.

Eräs yleinen tapa kielentää matematiikkaa on ongelmanratkaisuprosessin sanallinen selittäminen (Aspinwall & Aspinwall, 2003; Barlow & Drake, 2008; Drake & Barlow, 2007; Pugalee, 2001). Tällä tarkoitetaan sitä, että matematiikan tehtäviä ratkoessaan opiskelija kirjoittaa matemaattisen vastauksensa perinteiseen tapaan, jonka lisäksi hän selittää sanallisesti ratkaisun eri vaiheissa läpikäymänsä ajatusketjut, pohdinnat ja perustelut. Muita tapoja tuoda matemaattista kirjoittamista opetukseen on muun muassa oppimispäiväkirjat, omien (sanallisten) esimerkkien keksiminen, erilaisten esitystapojen yhdistäminen sekä oman vastauksen selittäminen ja kommentointi (Adu-Gyamfi ym., 2010; Aspinwall & Aspinwall, 2003; Barlow & Drake, 2008; Joutsenlahti, 2010).

Yleisesti ajatellaan, joskin harhaanjohtavasti, että ainoastaan hyvin symbolinen kirjoitustapa tuottaa oikeaa matemaattista tekstiä (Pimm, 1987, s. 136). Kielet kuitenkin lainaavat symboleja ja sanoja toisiltaan. Usiskinin (1996) mukaan myös matematiikan kieleltä on lainattu sanoja: esimerkiksi englannin kielen sana ”triangle” on alun perin tarkoittanut kolmiota, mutta sen merkitys on laajentunut myöhemmin tarkoittamaan myös triangelia sekä kolmen ihmisen muodostamaa suhdetta. Kieliä onkin joskus vaikea erottaa toisistaan (Pimm, 1987, s. 88–93; Usiskin, 1996). Usiskin (1996) huomauttaa, että esimerkiksi lauseissa ”Sylvillä on kolme veljeä.”,”Pekka on ensimmäinen jonossa.” ja”Puolet kansanedustajista äänesti lain hyväksymisen puolesta.” on matemaattista sisältöä. Tästä syystä matematiikan ajatteleminen liian erityisenä, pelkästään symbolisen kielenä on vaarallista – kun matematiikka esiintyy tutussa kontekstissa, sitä ei välttämättä osaa erottaa (Usiskin, 1996).

Matematiikan oppimisen kannalta kielten päällekkäisyys on osittain ongelmallista: kuinka tietää, missä rekisterissä milloinkin toimitaan? Opiskelijoiden tulisikin olla tietoisia siitä, että samoja sanoja saatetaan käyttää eri merkityksissä kielen eri rekistereissä. Tämän kaltaisia matematiikan kielen erityispiirteitä ja niiden ymmärtämistä tulisi myös painottaa opetuksessa (Pimm, 1987, s. 109). Pimmin (1987) mukaan näiden erityispiirteiden tunteminen on tärkeää matemaatikoksi kasvamisessa:

> *Learning to speak, and more subtly, learning to mean like mathematician, involves acquiring the forms and the meanings and the ways seeing enshrined in the mathematics register* (Pimm, 1987, s. 207).

Matematiikan rekisterin haltuun ottaminen tapahtuukin kielen rekisterien ja opiskelijan osaamisen rajapinnoilla. Usiskinin (1996) mukaan oppilaat oppivat kirjoittamaan omaa äidinkieltään hyvin, jos heitä ei rajoiteta käyttämään ainoastaan niitä sanoja, jotka he osaavat kirjoittaa oikein – rajoitusten höllentäminen ennemminkin lisää heidän haluaan kirjoittaa. Opiskelijoilla pitäisi siis olla mahdollisuus soveltaa matematiikkaa siten, ettei heitä ole rajoitettu käyttämään vain numeroita ja symboleja, joita he osaavat käsitellä oikeaoppisesti (Usiskin, 1996).

Matematiikan oppimisessa on kielten rekisterien päällekkäisyyden lisäksi muitakin haasteita. Wagner (2009) huomauttaa, että toisin kuin luonnollisten kielten opiskelussa, jossa uusia sanoja opitaan kuvailemalla merkityksiä, matematiikkaa opitaan määritelmien ja määrättyjen merkitysten kautta. Hänen mukaansa matematiikkaa tehdessä – kun etsitään yhdenmukaisuuksia, selitetään tehtyjä havaintoja, tehdään hypoteeseja ja todistetaan olettamuksia – kieltä käytetään kuitenkin luovasti. Esimerkiksi matematiikan oppikirjoissa ei käytetä laisinkaan persoonapronomineja, sillä matematiikan ajatellaan olevan universaalia ja täten subjektista riippumatonta. Tämä on matematiikan opiskelijalle haastavaa: hän käyttää luonnostaan yksikön ensimmäistä persoonamuotoa ratkoessaan matemaattisia ongelmia ja perustellessaan johtopäätöksiään, mutta tämä subjektiivinen lähestymistapa tulisi kadottaa, kun todistus ja siihen liittyvät pohdinnat tuodaan yleiselle, yksilöstä riippumattomalle tasolle (Wagner, 2009). Halliday (1978, s. 202) kuitenkin huomauttaa, että olisi virhe ajatella, että matematiikka kielenä olisi kokonaisuudessaan persoonatonta, formaalia ja eksaktia. Tämä luo osaltaan omat lisähaasteensa. Pimmin (1987) mukaan matematiikan kielessä symbolin ja objektin käsitteet menevät helposti sekaisin. Tämä johtuu hänen mukaansa siitä, että matematiikassa objektit ovat yleensä mentaalisia konstruktioita, ja täten abstrakteja. Tällöin objekti voidaan esittää ainoastaan sitä merkitsevän konventionaalisen symbolin kautta. Matemaattisia vaikeuksia esiintyykin juuri tällaisissa tilanteissa, joissa eksplisiittisistä asioista puhutaan metaforin (Pimm, 1987).

Metaforisen tason lisäksi matemaattisen tekstin lukemisen tekee haastavaksi sen epälineaarisuus. Yleensä matemaattinen teksti vaatii jatkuvaa siirtymistä tekstin ja taulukoiden, diagrammien, kaavojen ja graafien välillä sekä ymmärrystä täsmällisestä lauseopista (Adu-Gyamfi ym., 2010; Freitag, 1997; Selden & Selden, 2003). Matemaattinen teksti on käsitteellisesti tiiviimpää kuin muut tekstilajit, ja se on pullollaan sanallisia ja symbolisia ilmauksia koskevia sopimuksia ja käytäntöjä. Adu-Gyamfi kumppaneineen (2010) toteaakin, että tämän vuoksi ei voida olettaa, että opiskelija, joka pystyy sujuvasti lukemaan matemaattisten tekstin sanallisen sisällön, myös käsitteellisesti ymmärtäisi lukemansa. Myös National Council of Teachers of Mathematics uskoo, että koska lukeminen ja kirjoittaminen vaativat kielellisiä ja symbolisia ilmauksia, ne ovat elintärkeitä osia päättelyn, kommunikoinnin ja yhteyksien muodostamisen kehityksessä. Kommunikaatio onkin avain matemaatiikan oppimiseen:

> *They communicate to learn mathematics, and they learn to communicate mathematically* (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000, s. 6).

Matematiikan kielentämisen ja kommunikaation hyödyntäminen opetuksessa auttaa muodostamaan loogisia ajatteluketjuja (Pugalee, 2001), jotka tiedon karttuessa ovat avainasemassa matemaattisia todistuksia kirjoitettaessa (Ko ja Knuth, 2009). Griffiths (2000) määritteleekin matemaattisen todistuksen formaaliksi ja loogiseksi selitysketjuksi, joka alkaa aksioomista ja etenee loogisin askelin johtopäätökseen. Stylianides (2007) keskittyy matemaattisen todistuksen määrittelemisessä enemmän sen tarkoitukseen vaihtaa ajatuksia matemaatikkojen muodostamassa yhteisössä. Hänen mukaansa matemaattinen todistus muodostuu hyväksytyistä väittämistä (määritelmät, aksioomat jne.), argumentointikäytänteistä (päättelyn loogiset säännöt, vastaesimerkkien muodostaminen jne.) sekä esityskäytänteistä (kuvalliset ja symboliset ilmaisutavat). Mason (1985) antaa todistuksen muodostamiseen hyvin yksinkertaiset ohjeet: vakuuta ensin itsesi, sitten kaverisi ja lopuksi vihamiehesi.

Epistemologisesti matemaatikot ja filosofit ovat kiistelleet todistuksen luonteesta pitkään (Inglis, 2011; Raman, 2003; Weber & Mejia-Ramos, 2011). Ramanin (2003) mukaan todistamista voidaan käsitellä kommunikoinnin välineenä. Sfard (2000) jaottelee todistukset kahteen eri kategoriaan, yksityiseen ja yleiseen, niiden kohdeyleisöstä riippuen. Yksityiseen kategoriaan kuuluvien todistusten tarkoitus on poistaa todistajan omat epäilykset, kun taas yleiseen kategoriaan kuuluvat todistukset ovat suunnattu yhteisön muille jäsenille. Ramanin (2003) mukaan normaalisti ihmiset erottavat nämä kaksi todistuskategoriaa toisistaan, mutta matematiikan ammattilaiselle ne ovat kuitenkin vahvasti linkittyneet toisiinsa. Näin ollen esimerkiksi matematiikan professorin yksityiseen kategoriaan kuuluva todistus luo pohjan hänen yleisen tason todistukselleen:

> *Let's see, an even function. There is only one thing about it, and that is its graph is reflected across the axis. Yeah, and you can be*

> *quite convinced that it is true by looking at the picture. If you said enough words about the picture, you'd have a proof.* (Raman, 2003.)

Matematiikan opiskelijat eivät vielä täysin hahmota näiden kategorioiden välistä yhteyttä. Opiskelija saattaa olla aivan vakuuttunut esittämästään väitteestä, eli hänellä on hyvä yksityisen tason todistus. Ramanin (2003) mukaan opiskelija ei kuitenkaan osaa rakentaa formaalia todistusta oman yksityisen tason todistuksensa päälle, vaan kokee joutuvansa muodostamaan sen tyhjästä. Omat haasteensa tuo se, että todistukset pyritään kirjoittamaan ilman omaelämänkerrallisia kommentteja ja yleisellä tasolla välttäen personalisointia (Selden & Selden, 2003). Lisäksi ongelmia aiheuttaa muun muassa todistuksen idean ymmärtämisen haastavuus sekä puutteelliset epistemologiakäsitykset (Raman, 2003).

Tutkimustensa perusteella Raman (2003) esittelee Sfardista poiketen kolme todistuskategoriaa, joihin kuuluvat heuristinen todistus, proseduurillinen todistus sekä avaintiedon sisältävä todistus. Heuristinen todistus on yksityisen tason todistus, jonka tehtävänä on vakuuttaa todistuksen tuottaja itse. Proseduurillinen todistus on todistus, jonka tuottaja on vakuuttunut todistuksensa paikkansapitävyydestä, mutta ei välttämättä ymmärtänyt sen sisältöä. Tämän kaltaiset todistukset kuuluvat yleiseen kategoriaan. Avaintiedon sisältävät todistukset koostuvat sekä vakuuttumisesta että ymmärtämisestä ja ne yhdistävät todistuksen yleisen ja yksityisen tason. Tällaisessa todistuksessa tulee siis ilmi, miksi jonkin väite on tosi. Ramanin (2003) havainnot saavat tukea myös Weberin (2001) tutkimuksesta, jossa vertaillaan matematiikan opiskelijoiden ja jatko-opiskelijoiden todistuksia samoille väitteille. Weber huomasi, että perustutkinto-opiskelijan strategiset tiedot ovat riittämättömät. Hänen mukaansa alkuvaiheen opiskelija ei vielä tiedä, mitkä ovat juuri tämän matematiikan osa-alueen todistustekniikat, mitkä teoreemat ovat hyödyllisiä, milloin niitä tulisi käyttää, ja milloin taas kannattaisi edetä puhtaasti symbolisella tasolla.

Todistaminen on siis haastavaa, kun matemaattisen sisällön hallinta on vielä vajavaista. Ramanin (2003) ja Weberin (2001) tutkimukset osoittavat, että opiskelijoilla sekä lukiossa että yliopistossa on vaikeuksia itse todistusten tuottamisen lisäksi myös niiden tunnistamisessa. Heidän mukaansa myös opettajilla ala- ja yläkoulussa sekä lukiossa on samankaltaisia ongelmia todistuksen luonteen ymmärtämisessä. Vaikeudet johtuvat pääasiassa kahdesta asiasta: siitä, että opiskelija ei tiedä, mitä käsitteitä todistus pitää sisällään, sekä siitä, että opiskelija ei ymmärrä matemaattisia teoreemoja ja keskeisiä käsitteitä, vaan hän käyttää tietoa systemaattisesti väärin (Ko & Knuth, 2009; Weber, 2001). Todistaminen ja osoittaminen eivät siis ole yksinkertaisia toimenpiteitä, vaikka ne ovat erittäin keskeisiä matematiikan osa-alueita (Ko & Knuth, 2009; Weber, 2001). Weber (2001) on kuitenkin sitä mieltä, että todistaminen on syventävillä matematiikan kursseilla ainoa tapa arvioida opiskelijan matemaattista osaamista. Todistamisen taito osoittaa aihealueen syvällistä ymmärtämistä (Ko & Knuth, 2009). Siksi todistamiseen tulisi kiinnittää enemmän huomiota sekä opetuksessa että oppimisprosesseissa. Ramanin (2003) luokittelun mukaisesti heuristiset ja proseduurilliset todistukset tulisi yhdistää, jolloin yksityinen ja yleinen taso saadaan linkitettyä toisiinsa ja saadaan luotua laadukas matemaattisesti pätevä todistus. Matematiikan kirjoittaminen ei pelkästään auta tiedon ja menetelmien järjestelyssä, vaan sen lisäksi se auttaa hahmottamaan varsinaisia ajatusprosesseja (McIntosh & Draper, 2001). Eri kategorioiden todistuksia ja niiden linkittämistä toisiinsa voidaan siis harjoitella matematiikan kielentämistä vaativien tehtävien kautta.

McCormicin (2010) mukaan kirjoittamisprosessi korostaa tiedon keräämistä, järjestämistä, kertaamista ja ajatusten selventämistä. Hän huomauttaa, että kaikkia näitä voidaan suoraan käyttää hyödyksi matemaattisten ongelmien ratkaisussa. Myös NCTM (2000) on sitä mieltä, että matematiikan kirjoittaminen on erinomainen väline korostaa ongelmanratkaisua, perustelemista ja todistamista, kommunikointia, asioiden välisiä yhteyksiä sekä erilaisia esitystapoja. Ongelmanratkaisuprosessin selittäminen sanallisesti vaatiikin erilaista ajattelua kuin pelkästään itse ongelman ratkaiseminen (McCormick, 2010). McCormickin (2010) mukaan myös matematiikan opettajan on tärkeää pystyä selittämään matematiikkaa ja ymmärtämään sen kieli, käytettävät menetelmät ja kulttuuri. Hänen mukaansa kirjoittaminen kehittää ja vahvistaa näitä taitoja. Näin ollen matematiikan kielentäminen on oiva apuväline myös opettajankoulutuksessa ja sen kehittämisessä.

Kirjoittaminen, avoimet kysymykset ja kysymysten keksiminen kehittävät opiskelijoiden matemaattista ajattelua ja ymmärrystä, ja antavat tätä kautta lisätietoa heidän osaamisesta ja ajattelusta perinteisen arvioinnin ulkopuolelta (Aspinwall & Aspinwall, 2003; Drake & Barlow, 2007; Joutsenlahti, 2003; 2010; Joutsenlahti, Sarikka, Kangas & Harjulehto, 2013). Pugaleen (2001) mukaan kirjoittamisella on tärkeitä vaikutuksia matematiikan opettamiselle ja oppimiselle, sillä metakognitiivinen viitekehys on vahvasti läsnä ongelmanratkaisutilanteissa. Lisäksi kirjoittaminen ylläpitää opiskelijan päättelyn, kommunikoinnin ja yhteyksien muodostamisen kehitystä, ja täten syventää matemaattista osaamista ja laajentaa ajattelua (Aspinwall & Aspinwall, 2003; Adu-Gyamfi ym., 2010; Pugalee, 2001). Tästä syystä kirjoittamisen arviointi antaa välineen arvioida opiskelijan tapaa oppia ja ajatella (Pugalee, 2001). Myös Adu-Gyamfi kumppaneineen (2010) huomauttaa, että opettaja pystyy syvällisesti arvioimaan opiskelijoiden matematiikan ymmärrystä, kun arviointistrategioissa hyödynnetään lukemista ja kirjoittamista. Vaikka kirjoittamisen integroiminen matematiikan opetukseen vaatii ajallisia panostuksia, se on erinomainen tapa huomata oppilaiden harhakäsityksiä ja formaalisti arvioida heidän ymmärtämistään (McCormick, 2010).

Oppilaiden syvällistä matemaattista ymmärrystä ja sen kehittymistä voidaan siis arvioida lukemista ja kirjoittamista vaativien tehtävien avulla. Lukeminen ja kirjoittaminen tunnustetaankin olennaisiksi välineiksi matemaattisen ymmärryksen kehittämisessä ja arvioinnissa (Adu-Gyamfi ym., 2010; Drake & Barlow, 2007).

3.3 Matematiikan kirjoittaminen tehostetun kisällioppimisen menetelmässä

Kuten luvussa 2 tuli esille, tehostetun kisällioppimisen menetelmän keskeisin ajatus on kasvaa askel askeleelta asiantuntijaksi jatkuvan tuen ja palautteen ohjaamana (Vihavainen ym., 2011a). Tämä vastaa Yoren, Pimmin ja Tuanin (2007) näkemystä siitä, että matematiikan oppimisessa lapsen oma, luonnollinen kieli luo pohjan myöhemmille tieteenalan ominaisille keskustelutavoille ja tiedeyhteisössä käytetylle kielelle. Tästä syystä on ensisijaisen tärkeää kytkeä kotikieli koulun kieleen ja myöhemmin tieteen ja matematiikan kieleen (Joutsenlahti, 2003; Yore ym., 2007). Joutsenlahden (2003) mukaan matematiikan kielentäminen on tehokas tapa saada oppijan ajatus näkyväksi. Collinsin ja kumppaneiden (1991) mukaan tämä on yksi kognitiivisen kisällioppimisen menetelmän päätavoitteista. Kognitiivinen kisällioppiminen soveltuukin hyvin matematiikan, lukemisen ja kirjoittamisen opiskeluun (Collins ym., 1991).

Jotta opiskelija pystyisi tehokkaasti kirjoittamaan matematiikkaa, hänen tulee hallita matemaattiset esitystavat (numeeriset, symboliset, graafiset ja sanalliset) sekä niiden väliset yhteydet (Freitag, 1997). Näin ollen oppiakseen matemaattisen kirjoittamisen taidon opiskelijoiden tulee saada erityistä tukea ja ohjeistusta, sekä mahdollisuuksia korjata ja hioa kirjoittamistaan (Adu-

Gyamfi ym., 2010). Tähän tehostetussa kisällioppimisessa vahvasti läsnä oleva jatkuva tuki ja palaute antavat mahdollisuuden, jonka lisäksi viikkotehtävien palauttaminen, niistä palautteen saaminen sekä niiden ratkominen ohjausluokassa tukevat tätä tavoitetta (Vihavainen ym., 2011a; Vikberg, 2012). Yoren ja kumppaneiden (2007) mukaan tehokas oppimisen kehityskulku voidaan muodostaa helppojen aihealueiden avulla, joiden kautta saadaan luotua pohjaa tieteelliselle päättelylle. Sille tulee käyttöä myöhemmin vaikeamman materiaalin haltuun ottamiseen yhteydessä. Yore kumppaneineen (2007) huomauttaakin, että formaaliin ilmaisuun kiirehtiminen aiheuttaa ahdistuneisuutta, heikkoa itsetuntoa ja oppimisvaikeuksia; siksi on tärkeää antaa oppijalle aikaa sisäistää opittava kokonaisuus, ja vasta sitten siirtyä symbolisen tason kautta formaaleihin todistuksiin. Tästä näkökulmasta tehostetun kisällioppimisen menetelmän joustavuus yksilötason ohjaukseen on erityisen merkittävää.

Matematiikan opetuksen keskeisimmän tavoitteen tulisi olla todistuksen ymmärtämisen rakentaminen askel askeleelta siten, että se vastaa nykymatemaatikkojen keskuudessa jaettua ja toteutettua todistuskäsitystä (Harel & Sowder, 2007). Tämä on kuitenkin haastavaa. Seldenin ja Seldenin (2003) tutkimuksessa opiskelijat sanoivat lukevansa todistuksia askel askeleelta varmistuakseen jokaisen argumentin paikkansapitävyydestä, testaavansa väitteitä esimerkeillä ja varmistuvansa siitä, että todistuksen keskeiset ideat ovat järkeenkäypiä. Silti arvioidessaan erilaisten todistusten paikkansapitävyyttä opiskelijat osuivat oikeaan ainoastaan puolessa tapauksissa – siis täysin sattumanvaraisesti (Selden & Selden, 2003). Opiskelija ei siis pysty luotettavasti toteuttamaan hyviä aikomuksiaan.

Seldenin ja Seldenin (2003) tutkimuksessa pohdinnan ja uuden harkintakierroksen jälkeen opiskelijoiden uudet arviot eri todistusten aukottomuudesta ja matemaattisesta validiteetista osuivat oikeaan jo 81 prosentissa tapauksista. Tutkijat ehdottavatkin, että opiskelijoilla pitäisi olla mahdollisuus saada enemmän ja laajempaa ohjausta ja opetusta todistamisesta ja siinä tarvittavista kokonaisvaltaisista välineistä, kuten vastaesimerkeistä ja vastaväitteiden muodostamisesta. Koska henkilökohtaista ohjausta on helposti saatavilla ja kirjoittamista on mahdollista monitoroida viikkotehtävien tarkistuksen yhteydessä (Hautala ym., 2012), kisällioppimisen menetelmä soveltuu myös todistamisen oppimiseen.

Ko ja Knuth (2009) nostavat esille huolen siitä, ettei ohjaajien tietämys ole riittävää, ja että heidän harhakäsityksensä esimerkiksi todistamisesta ja vastaesimerkkien käytöstä siirtyvät eteenpäin muille opiskelijoille. Asialla on kuitenkin myös toinen puoli. Pimmin (1987) mukaan matematiikan kielen erityislaatuisuus sekä symbolin ja objektin käsitteiden päällekkäisyys luovat tilanteita, joissa opettajan käyttämä ”matemaatikkojen termistö” on ristiriidassa opiskelijan oman kielen kanssa. Tämä vaikeuttaa oppimisprosessia (Pimm, 1987). Henkilökohtainen ohjaus mahdollistaa matematiikan kielen kehittämisen asteittaisesti. Näin ollen ohjaajien käytön etuna on se, että luonnollisen kielen kehityskulun on mahdollista jatkua portaattomasti matematiikan rekisterin erinomaiseen hallintaan (Yore ym., 2007).

Yoren ja kumppaneiden (2007) mielestä matematiikan lukutaito on enemmän kuin matematiikan suurten ideoiden ymmärtämistä: se vaatii kokonaisvaltaista lukutaitoa ja itsenäistä kykyä matemaattiseen ajatteluun, ymmärryksen rakentamiseen ja ongelmanratkaisuun. Matematiikka inhimillisenä sosiaalisena prosessina vaatii matematiikan lukutaidolta käytännöllisyyttä, ja sen täytyy valmistaa oppijaa ymmärtämään ja toimimaan kriittisesti modernissa, matematisoituneessa yhteiskunnassa (Yore ym., 2007). Matemaattinen lukutaito, jota täysivaltainen ja aktiivinen yhteiskunnan jäsen tarvitsee, on analoginen tehostetun kisällioppimisen menetelmän täysivaltaiseksi yhteisön jäseneksi kasvamisen tavoitteen kanssa. Krussel (1998) huomauttaa, että jos lukutaito on koulutuksen tavoite, sen pitäisi olla itsestään selvästi myös matematiikan opetuksen tavoite. Hänen mukaansa matematiikan opetuksessa tulisi tästä syystä tehdä työtä sen eteen, että opiskelijat saavuttaisivat kokonaisvaltaisen ymmärryksen ja kunnioituksen matematiikan kieltä kohtaan.

4 Tutkimuksen toteuttaminen

Tässä luvussa esitellään ensin tutkimuksen konteksti kuvailemalla tehostetun kisällioppimisen menetelmän käytännön toteutusta tutkittavan kurssin puitteissa. Tämän jälkeen asetetaan tutkimuksen tavoite ja tutkimuskysymykset, sekä käydään läpi aineiston keruu- ja analysointimenetelmät. Luvun lopuksi pohditaan vielä tutkimuksen validiteettia ja reliabiliteettia.

4.1 Konteksti

Tutkimus toteutettiin Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksella syksyllä 2013 kurssin Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I aikana. Kyseessä on yhden periodin pituinen viiden opintopisteen aineopintojen kurssi, joka suoritetaan yleensä heti matematiikan opintojen alussa. Matematiikkaa opiskellaan paljon myös pitkänä sivuaineena (60 op). Näiden sivuaineopiskelijoiden tyypillisimmät pääaineet ovat fysiikka, kemia, tietojenkäsittelytiede, tilastotiede ja (kansan)taloustiede.

Kurssi Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I on opiskelijamäärältään suuri. Syksyllä 2013 kurssille ilmoittautui 492 opiskelijaa, joista 274 (55,7 %) oli sivuaineopiskelijoita. Kurssi on yksi ensimmäisistä matematiikan yliopistokursseista ja se suoritetaan yleensä ensimmäisen vuoden syksyllä yhdessä kurssien Johdatus yliopistomatematiikkaan ja Analyysi I kanssa. Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssilla käytetään myös tehostetun kisällioppimisen menetelmää. Kurssia Analyysi I on jo pitkään kehitetty opiskelijalähtöisemmäksi ottamalla huomioon koulu- ja yliopistomatematiikan välissä olevan kuilun sekä tukemalla opiskelijoiden integroitumista yliopisto-opintoihin (Oikkonen, 2009). Lisäksi matematiikan ja tilastotieteen laitoksen ensimmäisen vuoden opiskelijat osallistuvat ohjaajatuutorointiin, joka korostaa yhdessä oppimista, opiskelutaitojen oppimista sekä oppimisyhteisön aktiivisena jäsenenä olemista (Hautala, 2010). Seuraavassa kuvataan tarkemmin tehostetun kisällioppimisen menetelmän toteutusta kurssilla Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I.

Kurssi Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I koostui viikoittaisista kurssitehtävistä, henkilökohtaisesta ohjauksesta niiden tekemiseen sekä luennoista. Luentoja oli neljä tuntia viikossa. Kurssin pääpaino oli kuitenkin kurssitehtävien tekemisessä.

Opiskelijoita kannustettiin palauttamaan kurssin viikoittaiset tehtävät, vaikka se olikin vapaaehtoista. Kurssitehtävät oli jaettu kahteen eri kategoriaan, tähdellisiin ja tähdettömiin tehtäviin. Tehtäviä oli viikoittain keskimäärin 15, joista tähdellisiä tehtäviä oli yhdestä kahteen lukuun ottamatta kurssin viimeistä viikkoa, jolloin ei ollut enää tähdellisiä tehtäviä. Yksi tehtävä oli valinnainen tehtävä, jonka avulla sai korvattua minkä tahansa muun tähdettömän tehtävän. Viikkotehtävät palautettiin erityisen kansilehden kanssa (kts. kuva 5). Kansilehden avulla tehtävien palauttamisen yhteydessä opiskelijat vastasivat myös ohjaukseen osallistumista koskevaan kysymykseen. Tehdyistä tehtävistä ja ohjaukseen osallistumisesta pidettiin kirjaa merkitsemällä ne kurssitiedostoon.

Sekä tähdettömistä että tähdellisistä tehtävistä oli mahdollista saada neljä lisäpistettä kurssikokeeseen. Yhteensä lisäpisteitä oli saatavilla siis kahdeksan. Molemmissa tehtäväkategorioissa noudatettiin samoja pisterajoja. Yhden lisäpisteen sai tekemällä 45 prosenttia tehtävistä, ja täysiin neljään lisäpisteeseen vaadittiin 90 prosenttia tehtävistä. Pisterajat esitetään taulukossa 1. Tehtäviä oli yhteensä 90, joista tarkastettavia tähtitehtäviä oli kahdeksan tehtävää. Yhden lisäpisteen sai siis tekemällä 41 tähdetöntä tehtävää tai neljä tähtitehtävää.

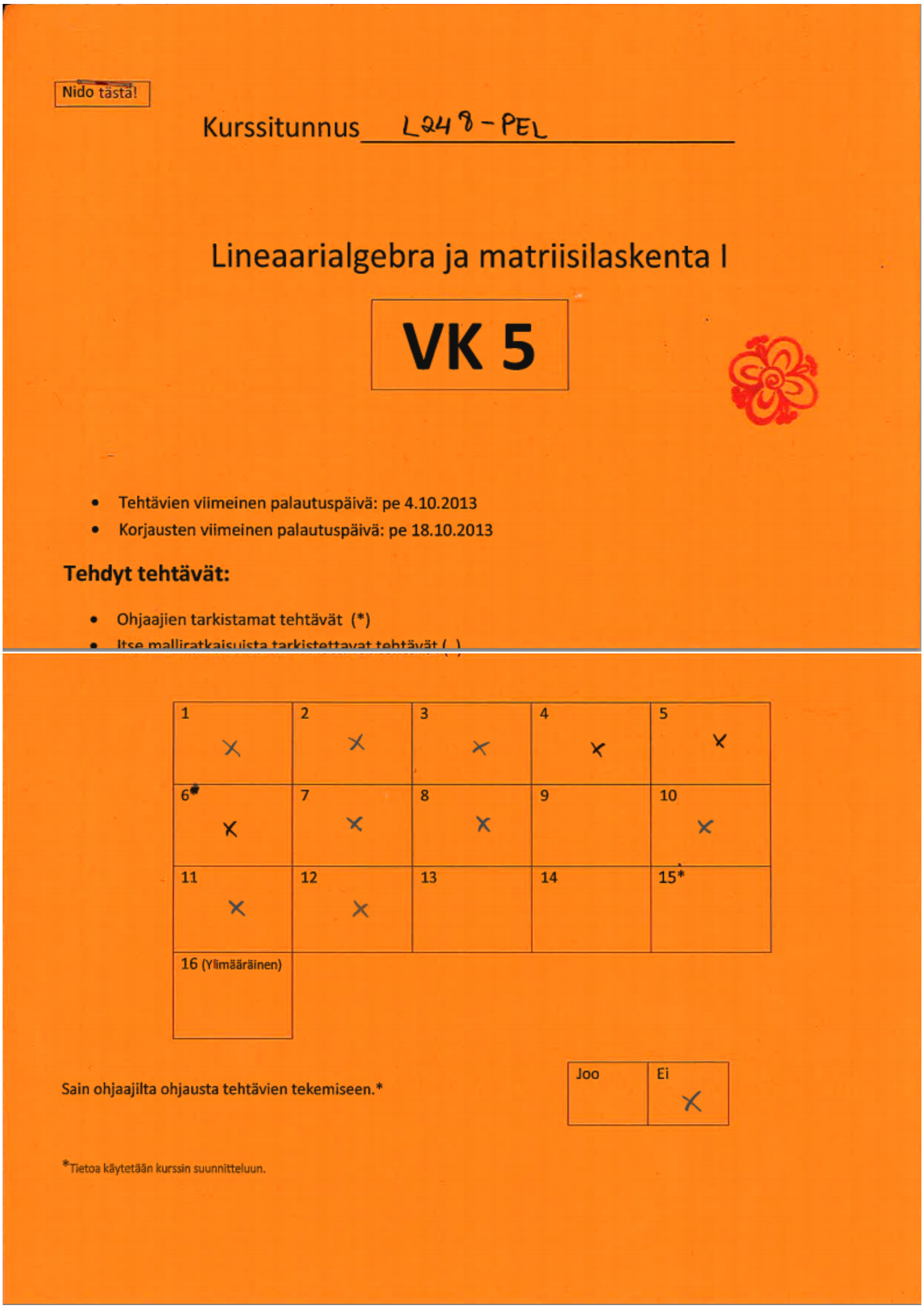
Tehdyt tehtävät (%)	< 45	45	60	70	90
Lisäpisteet	0	1	2	3	4

Taulukko 1: Kurssitehtävistä saatujen lisäpisteiden pisterajat.

Tähdelliset tehtävät tarkastettiin ja kommentoitiin sekä matemaattisen sisällön että kirjallisen ilmaisun osalta ja tarvittaessa palautettiin opiskelijalle korjattavaksi. Korjausmahdollisuuksia oli kaksi. Kurssitehtävät tarkastivat kurssin vastuuopettaja yhdessä kurssin ohjaajien kanssa. Ohjaajat olivat matematiikan ja tilastotieteen laitoksen opiskelijoita, jotka valittiin tehtävään haastattelun perusteella. Ohjaajia oli kahdenlaisia. Tavallisia ohjaajia oli yhteensä neljä, joiden lisäksi mukana oli kaksi niin kutsuttua senioriohjaajaa[1]. Heidän tehtäviinsä kuului ohjauksen ja tehtävien tarkastamisen lisäksi osallistuminen kurssitehtävien suunnitteluun sekä tehtävien malliratkaisujen tuottaminen.

Matematiikan ja tilastotieteen laitoksella on erityinen henkilökohtaiseen ohjaukseen varattu luokkahuone. Luokka on varusteltu interaktiivista opiskelua varten. Ohjausluokan pöydät ovat valkotauluja, joihin sekä ohjaajat että opis-

[1] Tutkija toimi kurssin toisena senioriohjaajana.



Nido tästä!

Kurssitunnus L248-PEL

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

VK 5

- Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 4.10.2013
- Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 18.10.2013

Tehdyt tehtävät:

- Ohjaajien tarkistamat tehtävät (*)
- Itse malliratkaisuista tarkistettavat tehtävät ( )

1 X	2 X	3 X	4 X	5 X
6 X	7 X	8 X	9	10 X
11 X	12 X	13	14	15*
16 (Ylimääräinen)				

Sain ohjaajilta ohjausta tehtävien tekemiseen.*

Joo	Ei
	X

*Tietoa käytetään kurssin suunnitteluun.

Kuva 5: Kurssitehtävien palauttamiseen käytetty kansilehti.

kelijat voivat tusseilla hahmotella ratkaisujaan. Myös esimerkiksi luokan ikkunat ovat vapaasti käytettävissä, ja luokassa on myös perinteisiä liitutauluja. Lisäksi luokassa on kuulosuojaimia rauhallisen työskentelyn mahdollistamiseksi. Tutkittavan kurssin puitteissa tehtävien tekemisen tueksi oli saatavilla henkilökohtaista ohjausta joka arkipäivä useita tunteja, yleensä noin klo 12–18. Kurssin ohjaajat pukeutuivat huomioliiveihin lähestymisen helpottamiseksi. Ohjaajien lisäksi myös kurssin vastuuopettaja osallistui kurssin ohjaamiseen. Näin ohjauksen ohessa opiskelijoille muodostui kontakteja ensimmäisen vuoden opiskelijoista vanhempiin opiskelijoihin, jatko-opiskelijoihin ja aina yliopiston opetus- ja tutkimushenkilökuntaan asti. Tämän tarkoitus oli edesauttaa sosiaalisen kontekstin muodostumista, jossa opiskelija oppii monia keskeisiä kognitiivisia taitoja (Collins ym., 1991).

Kurssin ohjaajat pyrkivät ohjaamaan opiskelijoita kisällioppimisen ideologiaa noudattaen. Tarkoitus oli siis auttaa opiskelijaa vain juuri sen verran, että hän pääsee tehtävässä itse eteenpäin, tukea opiskelijan omaa ajattelua ja näyttää mallia ongelmanratkaisuprosesseissa. Taulukossa 2 esitellään ohjaajien matematiikan ja tilastotieteen laitoksella noudattamat periaatteet. Ne seuraavat Vihavaisen kumppaneineen (2011a) tehostetulle kisällioppimiselle asettamaa viitekehystä.

Ohjaajat ja kurssin vastuuopettaja kokoontuivat kerran viikossa yhteen keskustelemaan kuluvan viikon tehtävistä sekä yleisesti ohjaukseen ja ohjaustilanteisiin liittyvistä kysymyksistä. Erityisesti keskusteltiin ohjausperiaatteista ja niiden soveltamisesta käytännön ohjaustilanteisiin. Samalla opiskelijoiden palaute tehtävistä sekä yleisemmin koko kurssista kulkeutui kurssin vastuuopettajalle. Kurssin vastuuopettaja pystyi näin ottamaan ohjaajien havainnot ja opiskelijoilta tulleen palautteen huomioon tulevia tehtäviä ja luentoja suunnitellessa. Tämä tukee myös Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksen toimintakäsikirjassa laitoksen opetukselle asetettua opettajien ja opiskelijoiden jatkuvan vuorovaikutuksen tavoitetta (Matematiikan ja tilastotieteen laitos [MTL], 2007).

Tehostetun kisällioppimisen menetelmässä korostuu oppijan oma oivallus. Ohjauksen tarjoaminen mahdollistaa oppimisprosessille jatkuvan tuen, jonka avulla oppimisen ei kuitenkaan tarvitse tapahtua yksin. Kun opiskelijan ajatukset ja ohjaus ovat jatkuvassa vuoropuhelussa keskenään, ohjaus kulkee sopivasti opiskelijan oppimistason edellä ja oppiminen saadaan Vygotskyn lähikehityksen vyöhykkeelle (Vygotsky, 1978, s. 88–89). Vuoropuhelun kautta luodaan samalla ero ohjaus- ja arviointitilanteen välille.

- Jätä onnistumisen ilo opiskelijalle.
- Älä anna vastauksia, vaan johdata oikeaan suuntaan.
- Ole kannustava, varsinkin kun opiskelijalla on ollut vaikeuksia.
- (Uudet) opiskelijat ovat ujoja. Lähesty opiskelijoita aktiivisesti äläkä välttämättä odota, että he kysyvät neuvoa.
- Ohjaaja ei ole tietopankki. Opiskelijan on opittava lukemaan luentomateriaalia.
- Ohjaajan ei tarvitse tietää kaikkea, ja sen saa näyttää opiskelijalle.
- Kuuntele opiskelijaa.
- Oikeita ajattelutapoja on yleensä enemmän kuin yksi. Vältä omien ratkaisumallien tuputtamista.
- Älä siedä epäkohteliaita opiskelijoita.
- Älä anna yksittäisten opiskelijoiden viedä liikaa aikaasi.

Taulukko 2: Ohjauksen periaatteet.

Kurssilla kiinnitettiin erityistä huomiota matematiikan kirjoittamiseen. Formaalien ja epämuodollisten todistusten erottaminen toisistaan on hankalaa, johon kurssin vastuuopettaja pyrki vastaamaan käyttämällä erityistä ”todistushattua”. Luennoilla käytiin läpi eritasoisia perusteluja, jonka vuoksi todistushattua käytettiin hämmennyksen välttämiseksi silloin, kun meneillään oli tarkka, eksplisiittinen todistus. Näin opiskelijat saivat käsityksen todistamisen luonteesta ja oppivat erottamaan Ramanin (2003) määrittelemät todistuksen eri kategoriat toisistaan.

Opiskelijat saivat myös palautetta omasta matemaattisen tekstin tuottamisestaan. Kurssitehtäviä tarkistaessa ohjaajat kiinnittivät huomiota opiskelijan vastauksen matemaattisen sisällön lisäksi erityisesti vastauksen kirjalliseen ilmaisuun. Kurssin kotisivuilla oli tavoitematriisi, josta myös opiskelijoiden oli mahdollista tarkistaa, minkälaisia perustaitoja kurssilla oli tarkoitus oppia. Matemaattisen kirjoittamisen osalta keskeiset oppimistavoitteet täyttävät taidot saavutti, jos oppi määrittelemään käyttämänsä vakiot ja symbolit, kirjoittamaan kokonaisia, ymmärrettäviä lauseita, käyttämään matemaattisia symboleita vain tarvittaessa, lukemaan ja seuraamaan todistuksia, sekä tuottamaan omia ”Osoita, että . . . ”-tyyppisiä todistuksia. Tavoitematriisi esitellään taulukossa 3. Vastaavanlaisia tavoitteita oli myös muilla ensimmäisen opiskeluvuoden syksyyn ajoitetuilla matematiikan kursseilla.

	Oppimistavoitetta lähestyvät taidot	**Oppimistavoitteen saavuttavat taidot**
Matemaattisen tekstin lukeminen	Lukee kurssikirjallisuutta. Vertaa omia ratkaisujaan harjoitustehtävien malliratkaisuihin.	Tutustuu luennon aiheeseen etukäteen kurssikirjallisuuden avulla saadakseen opetuksesta täyden hyödyn.
Suullinen viestintä	Pyytää apua matemaattisiin ongelmiinsa.	Pystyy muotoilemaan tarkkoja kysymyksiä matemaattisiin ongelmiinsa. Käyttää oikeita nimityksiä matemaattisille käsitteille. Osallistuu keskusteluun ohjauksessa ja luennoilla.
Ratkaisujen tuottaminen	Kirjoittaa ratkaisuja, joiden kieli ja looginen rakenne ovat niin selkeitä, että ulkopuolinen saa niistä selvän. Tekee itsenäisesti harjoitustehtäviä kurssimateriaalin avulla. Käyttää kurssin merkintöjä vastauksissaan.	Määrittelee käyttämänsä symbolit kuten muuttujat ja vakiot. Kirjoittaa kokonaisia ja ymmärrettäviä lauseita ja käyttää matemaattisia symboleita vain tarvittaessa.
Todistaminen	Tietää eron esimerkin, määritelmän ja lauseen välillä.	Lukee todistuksia ja pystyy seuraamaan niiden loogista rakennetta. Ratkaisee yksinkertaisia ”Osoita, että . . . ” -tyyppisiä tehtäviä.

Taulukko 3: Kurssin oppimistavoitteet: Perusvalmiudet (MTL, 2013).

Näin ollen opiskelijat saivat kurssin aikana palautetta sekä matemaattisesta osaamisesta että matematiikan kirjoittamisesta. Matemaattiseen ilmaisuun ja vastausten muotoiluun pyrittiin kiinnittämään huomiota myös ohjaustilanteissa. Adu-Gyamfin ja kumppaneiden (2010) mukaan arviointi ja arvioinnin alaiset tehtävät määrittävät sen, minkälaista matemaattista tietoa ja suoritusta arvostetaan: jotta matematiikan kirjoittaminen nousisi keskeiseen asemaan matematiikan oppimisessa ja oppimisen artikuloimisessa, arvioinnin tulisi perustua opettajan ja opiskelijoiden yhteiseen käsitykseen siitä, että oppiminen ja sen ilmaiseminen lukemisen ja kirjoittamisen kautta on kaiken vaivan arvoinen tavoite. Tästä näkökulmasta katsoen, ottaen huomioon matemaattiseen kirjoittamiseen kiinnitetyn huomion, opiskelijoiden matemaattisen kirjoittamisen tutkiminen on mielekästä.

Kaiken kaikkiaan kisällioppimisen menetelmää pyrittiin toteuttamaan kurssilla Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I siten, että kurssista ja sen aihealueista muodostuisi dynaaminen oppimisprosessi, jossa palaute kulkee joka suuntaan ja jossa kaikki osalliset oppivat.

4.2 Tutkimuksen tavoite ja tutkimuskysymykset

Useat tutkijat ovat samaa mieltä siitä, että laadukkaan oppimisympäristön tulisi tukea sekä aktiivista oppimista että opiskelijan itseohjautuvuutta, jonka lisäksi suoritettavien oppimistehtävien tulisi olla asiaankuuluvia ja mielekkäitä (Breiter & Scardamalia, 1989; Collins ym., 1989; Collins ym., 1991; Vosniadou, Ioannides, Dimitrakopoulou & Papademetriou, 2001). Lisäksi heidän mukaansa oppimisen sosiaalisesta luonteesta johtuen oppimisympäristön tulisi kannustaa yhteistyöhön ja sosiaaliseen vuorovaikutukseen samalla huomioiden opiskelijoiden yksilölliset tarpeet. Vosniadou kumppaneineen (2001) kuitenkin huomauttaa, että erityisesti luonnontieteiden opetuksessa tällaisten tutkimukseen nojautuvien oppimisympäristöjen kehittäminen ei ole itsestään selvää.

Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksella on tiedostettu tarve kehittää uusia laadukkaampia oppimisympäristöjä. Hautalan ja kumppaneiden (2012) mukaan laitoksella huomattiin, että vaikka opiskelijat pääsevät kursseista läpi, he kohtaavat myöhemmissä opinnoissaan ongelmia, sillä he eivät olleet syvällisesti ymmärtäneet aiemmin opiskelemiaan käsitteitä. Tehostetun kisällioppimisen menetelmän haluttiin ratkaisevan tämä ongelma, ja tulokset ovatkin olleet lupaavia. Hautalan ja kumppaneiden (2012) mukaan tehostetun kisällioppimisen menetelmä nosti opiskelijoiden matemaattista itseluottamusta, sekä sai opiskelijat tietoiseksi osaamistasostaan, vaikka kurssin vaatimustasoa ja työmäärää nostettiin. Kognitiivisten taitojen oppimisen on myös kiinnitetty huomiota: rutiininomaisten tehtävien osuus kaikista tehtävistä on vähentynyt, ja tehtävien monipuolisuus lisääntynyt sekä kurssi- että koetehtävien osalta (Rämö, Oinonen & Vikberg 2014). Lisäksi laitoksen opiskelijat pitävät tehostetun kisällioppimisen menetelmästä (Hautala ym., 2012; Rämö & Vikberg, 2014). Hautala ja kumppanit (2012) kuitenkin huomauttavat, että lisätutkimusta ja uusia välineitä tarvitaan selvittämään opiskelijoiden matemaattisen osaamisen kehitystä ja tehtyjen muutosten vaikuttavuutta tehostetun kisällioppimisen menetelmän puitteissa.

Tämän tutkimuksen tavoitteena on kartoittaa kurssikokeen arvioinnin ja matemaattisen kirjoittamisen tutkimisen kautta opiskelijoiden syvällistä ymmärtämistä. Tutkielmassa keskitytään erityisesti siihen, mikä on henkilökohtaiseen ohjaukseen osallistumisen ja kurssitehtävien tekemisen suhde oppimistuloksiin. Näihin asioihin keskitytään kahdesta syystä. Ensinnäkin ne edustavat tehostetun kisällioppimisen menetelmän peruspilareita, tekemällä oppimista ja jatkuvan tuen merkitystä käytännön oppimistilanteissa. Toiseksi ohjauksen tarjoaminen ja tehtävien tarkastaminen vaativat laitokselta sekä ajallisia että taloudellisia resursseja. Tutkimus vastaa siis osaltaan myös siihen, mitä tällä panostuksella saavutetaan. Tavoitteena ei ole kehittää uutta opetusmenetelmää, joka keskittyisi matemaattisten todistusten opettamiseen, vaan tutkia, oppiiko kisällimenetelmällä toteutettuun ohjaukseen osallistujat matemaattista kirjoittamista ja kielentämistä, josta he sitten luvun 3 kirjallisuuskatsauksen perusteella hyötyvät myöhemmissä opinnoissaan.

Tutkimuksen avulla pyritään vastaamaan seuraaviin tutkimuskysymyksiin:

1. Miten kyky tuottaa matemaattista tekstiä liittyy kurssikokeessa menestymiseen?
2. Miten kurssitehtävien tekeminen liittyy
   - 2.1. kurssikokeessa menestymiseen
   - 2.2. kykyyn tuottaa matemaattista tekstiä?
3. Miten ohjaukseen osallistuminen liittyy
   - 3.1. kurssikokeessa menestymiseen
   - 3.2. kykyyn tuottaa matemaattista tekstiä?

Tutkimuksen kokonaisvaltaisena tavoitteena on siis pelkkää kurssiarvosanaa laajemmin arvioida opiskelijoiden matemaattista osaamista sekä kartoittaa siihen vaikuttavia tekijöitä. Samalla tutkimustulokset kertovat, onko tehostetun kisällioppimisen menetelmässä potentiaalia matematiikan kielentämisen opettamiselle ja oppimiselle. Osaltaan tutkimus vastaa myös siihen, kuinka hyvin tutkimuksen puitteissa kehitetty arviointimenetelmä matematiikan kirjoittamisen tutkimiseen.

4.3 Tutkimusmenetelmät

Tutkimuksen aineisto kerättiin useasta eri lähteestä. Tutkijan käytettävissä olivat kurssin loppuarvioinnin tulokset sekä kurssin aikana kerätyt tilastot viikkotehtävien tekemisestä ja ohjaukseen osallistumisesta. Lisäksi tutkija arvioi yhden kurssin loppukokeessa olleen tehtävän matemaattisen kirjoittamisen osalta. Nämä muodostavat tutkimuksen aineiston, jolla pyritään vastaamaan edellä esitettyihin tutkimuskysymyksiin.

4.3.1 Tutkimusotos

Kurssille ilmoittautui yhteensä 492 opiskelijaa. Osa kurssille ilmoittautuneista perui ilmoittautumisensa, jolloin kurssin loppupuolella ilmoittautuneita oli enää 484 opiskelijaa. Näistä opiskelijoista kurssin loppukokeeseen osallistui 372 opiskelijaa. Loppukokeeseen osallistuneilta arvioitiin yksi tehtävä myös matemaattisen kirjoittamisen osalta. Siispä nämä opiskelijat muodostavat tutkimuksen tutkittavan aineiston (N=372). 47 prosentilla näistä opiskelijoista pääaineena on matematiikka. Näin ollen otoksesta sivuaineopiskelijoita on 53 prosenttia.

4.3.2 Matematiikan kirjoittamisen arviointi

Opiskelijoiden matemaattista kirjoittamista arvioitiin yhden kurssikokeen tehtävän b-kohdan perusteella. Arvioitavaksi tehtäväksi valittiin kokeen tehtävistä sellainen, joka todennäköisimmin edellyttää pitkää sanoja sisältävää vastausta. Näin opiskelijoiden välille saatiin luotuja selkeämpiä eroja. Samankaltaisia tehtäviä tehtiin kurssin aikana useita, ja niistä osa oli tarkastettavaksi palautettuja tähtitehtäviä. Näin ollen kurssin opiskelijoilla oli ollut mahdollisuus saada palautetta omasta matematiikan kirjoittamisestaan myös juuri tämän kaltaisissa tehtävissä.

Seuraavassa esitellään kirjoittamisen osalta arvosteltu koetehtävä. Arviointi suoritettiin ensisijaisesti tehtävän b-kohdan perusteella. Siihen vastaamattomia opiskelijoita oli yhteensä 13. Näistä neljä arvioitiin a-kohdan perusteella kriteeristöä soveltaen. Yhdeksän opiskelijaa eivät olleet vastanneet kumpaankaan kohtaan, eikä heidän muussakaan kokeessa ollut arvioitavaksi soveltuvaa materiaalia. He eivät siis saaneet lainkaan kirjoituspisteitä.

Tehtävä 3

a) Määritä vektorin $\bar{v} = (2, 5)$ koordinaatit kannan $((-1, 2), (0, 3))$ suhteen.

b) Merkitään $\bar{v}_1 = (1, 0, 3)$, $\bar{v}_2 = (1, 1, 0)$ ja $\bar{v}_3 = (-1, 0, a)$, missä $a \in \mathbb{R}$. Millä luvun a arvoilla jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on vapaa?

Ratkaisuehdotus:

a) Huomataan, että $(2, 5) = (-2)(-1, 2) + 3(0, 3)$. Siten koordinaatit ovat -2 ja 3. Jos koordinaatteja ei näe suoraan, voi halutessaan myös ratkaista yhtälön $(2, 5) = x_1(-1, 2) + x_2(0, 3)$, missä $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

b) Tutkitaan yhtälöä $x_1(1, 0, 3) + x_2(1, 1, 0) + x_3(-1, 0, a) = \bar{0}$, missä $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. On selvitettävä, millä luvun a arvoilla yhtälöstä seuraa välttämättä, että $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ja $x_3 = 0$. Toisin sanoen on otettava selville, milloin yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu (joka on siis $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ja $x_3 = 0$).

Yhtälö saadaan muotoon $(x_1 + x_2 - x_3,\ x_2,\ 3x_1 + ax_3) = (0, 0, 0)$. Tätä yhtälöä vastaa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ 3x_1 + ax_3 &= 0. \end{cases}$$

Yhtälöryhmän matriisi on muotoa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & a & 0 \end{array}\right].$$

Muutetaan se alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisiksi, josta nähdään ratkaisujen lukumäärä:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & a & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & a+3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3+3R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+3 & 0 \end{array}\right].$$

Täytyy päätellä, millä a:n arvoilla ratkaisuja on täsmälleen yksi. Ratkaisuja on joka tapauksessa olemassa, sillä yhtälöryhmällä on aina triviaali ratkaisu $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ja $x_3 = 0$. Nyt täytyy vain selvittää, missä tapauksessa ratkaisuja ei ole äärettömän montaa. Tämä nähdään vapaista muuttujista. Vapaita muuttujia ei ole, jos ja vain jos $a + 3 \neq 0$. Silloin nimittäin jokaisessa (viivan vasemmalla puolella olevassa) sarakkeessa on johtava alkio. Siten ratkaisuja on täsmälleen yksi, jos ja vain jos $a \neq -3$.

Näin ollen jono on vapaa, jos ja vain jos $a \neq -3$.

Muita ratkaisutapoja:

Halutessaan yhtälöryhmän matriisiin voi muuttaa redusoiduksi porrasmatriisiksi ja tehdä päätelmät siitä. Kolmas vaihtoehto on tutkia, milloin yhtälöryhmän kerroinmatriisi on kääntyvä. Tämä on helppoa esimerkiksi determinantin avulla. Ratkaisuja on täsmälleen yksi, jos ja vain jos kerroinmatriisi on kääntyvä.

Kaikki vastaajien tehtävät arvioitiin ensin matemaattisen sisällön osalta, jonka jälkeen siirryttiin arvioimaan vastausten kirjallista tasoa. Näin vastauksen matemaattinen ja kirjallinen sisältö eivät sekoittuneet toisiinsa ja arviointi pysyi tasaisena. Tehtävän kirjoittamisen arvioinnissa käytettiin kymmenen kriteerin sarjaa. Kriteeristö on sopusoinnussa Gillmanin (1978) suosittelemien matemaattisen kirjoittamisen käytänteiden kanssa.

Kriteeristö pyrittiin muodostamaan kurssin oppimistavoitteiden pohjalta (kts. taulukko 3) mahdollisimman konkreettiseksi, jotta arviointi olisi tasapuolista ja arvioijasta riippumatonta. Kirjoittamisen arvioinnin teki allekirjoittanut yksin. Kriteerit luotiin tehtävän yleisimmän vastaustavan mukaisesti. Tätä tapaa käytti tai yritti käyttää lähes jokainen tehtävään vastannut opiskelija. Jos opiskelija teki tehtävän jollakin toisella tavalla (eli kääntyvyyttä ja determinanttia hyväksi käyttäen), arvostelu toteutettiin vastaustapaan soveltaen. Kriteeristö soveltui arvioijan mielestä myös tähän selvästi vähemmistössä olleeseen vastaustapaan erinomaisesti.

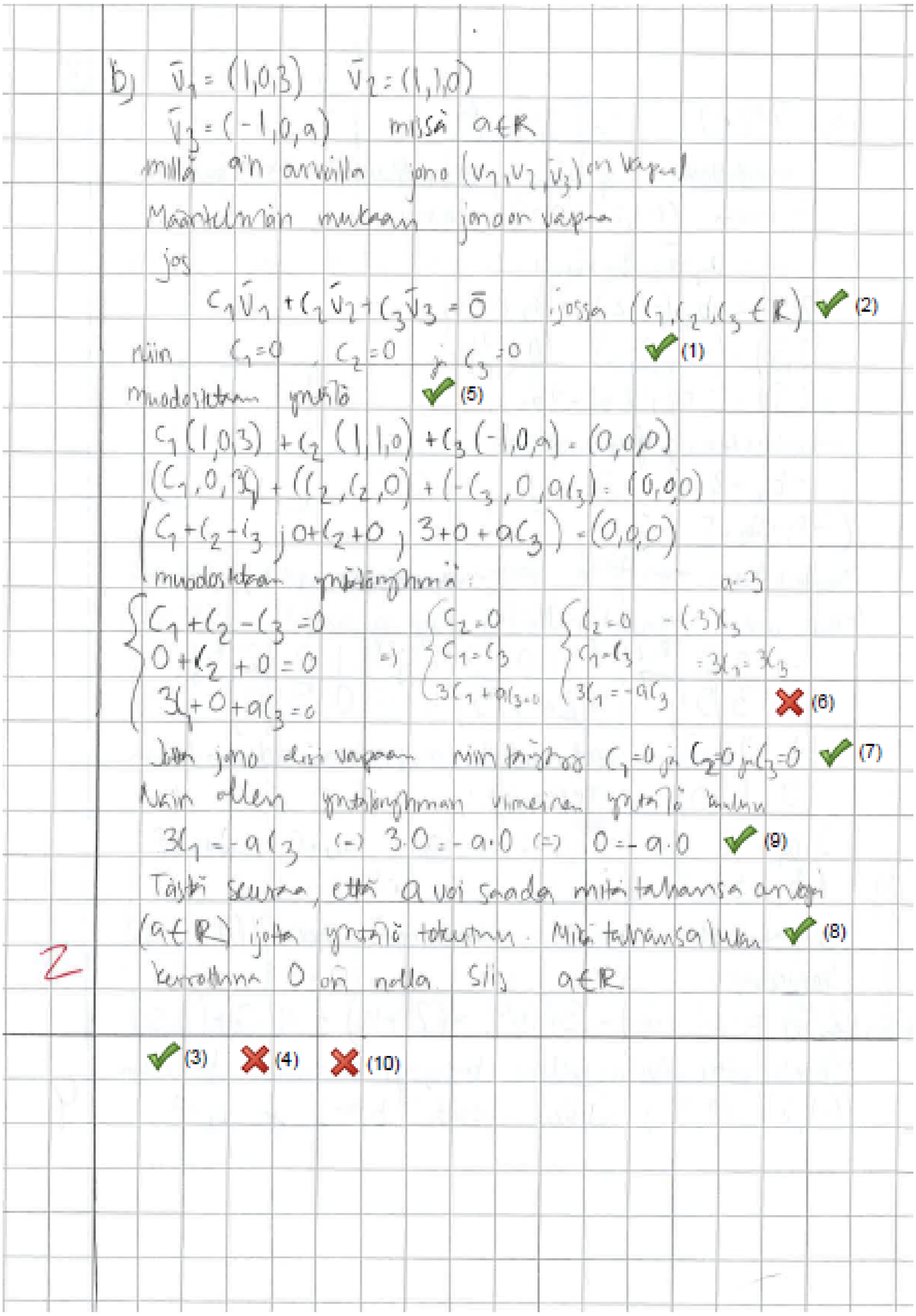
Koetehtävän arvioinnissa käytetty kriteeristö esitellään alla olevassa taulukossa 4. On hyvä huomata, että kriteerit 9 ja 10 vaikuttavat kirjoittamisesta saatuihin kokonaispisteisiin negatiivisesti.

Nro	**Kriteeri**	**Tarkennuksia**
1	Vastaaja kertoo, mitä tehtävässä tutkitaan.	Vapauden määritelmä; vastaaja yrittää asettaa taustaa sille, mitä tehtävässä aletaan tehdä.
2	Vastaaja määrittää muuttujat x_1, x_2 ja x_3.	”Oletetaan, että $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.” Riittää, että tämä tulee esille jossain kohtaa vastausta.
3	Vastaaja käyttää vastauksessaan kokonaisia lauseita.	Vastauksessa on jossain kohdin kokonaisia lauseita. Pelkkä teksti ei siis riitä.
4	Vastaaja käyttää isoja kirjaimia ja pisteitä (vastauksen loogisuus ja kielellinen laatu)	Tämä on loogisuus- ja ”hienostuneisuuspiste”.
5	Vastaaja johdattelee yhtälönratkaisuun ja/tai matriisiin (riippuen vastaustavasta).	
6	Vastaaja sisällyttää käyttämänsä kaavat, matriisit ja yhtälöt lauseiden sisälle.	
7	Vastaaja vetää sanalliset johtopäätökset saadusta matriisista.	Johtopäätösten tulee olla sanallisia.
8	Vastaaja vetää sanalliset johtopäätökset koko tehtävään.	Johtopäätösten tulee olla sanallisia ($a \neq -3$ vs. siis jono on vapaa, kun $a \neq -3$).
9	Vastaaja käyttää symboleja sanojen asemasta tai liiallisesti turhia lyhenteitä.	Piste tulee, jos muualla kuin yhtälönratkaisussa on käytetty implikaatio- tai ekvivalenssinuolia. Yleisin tapaus oli johtopäätöksissä $a + 3 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -3$.

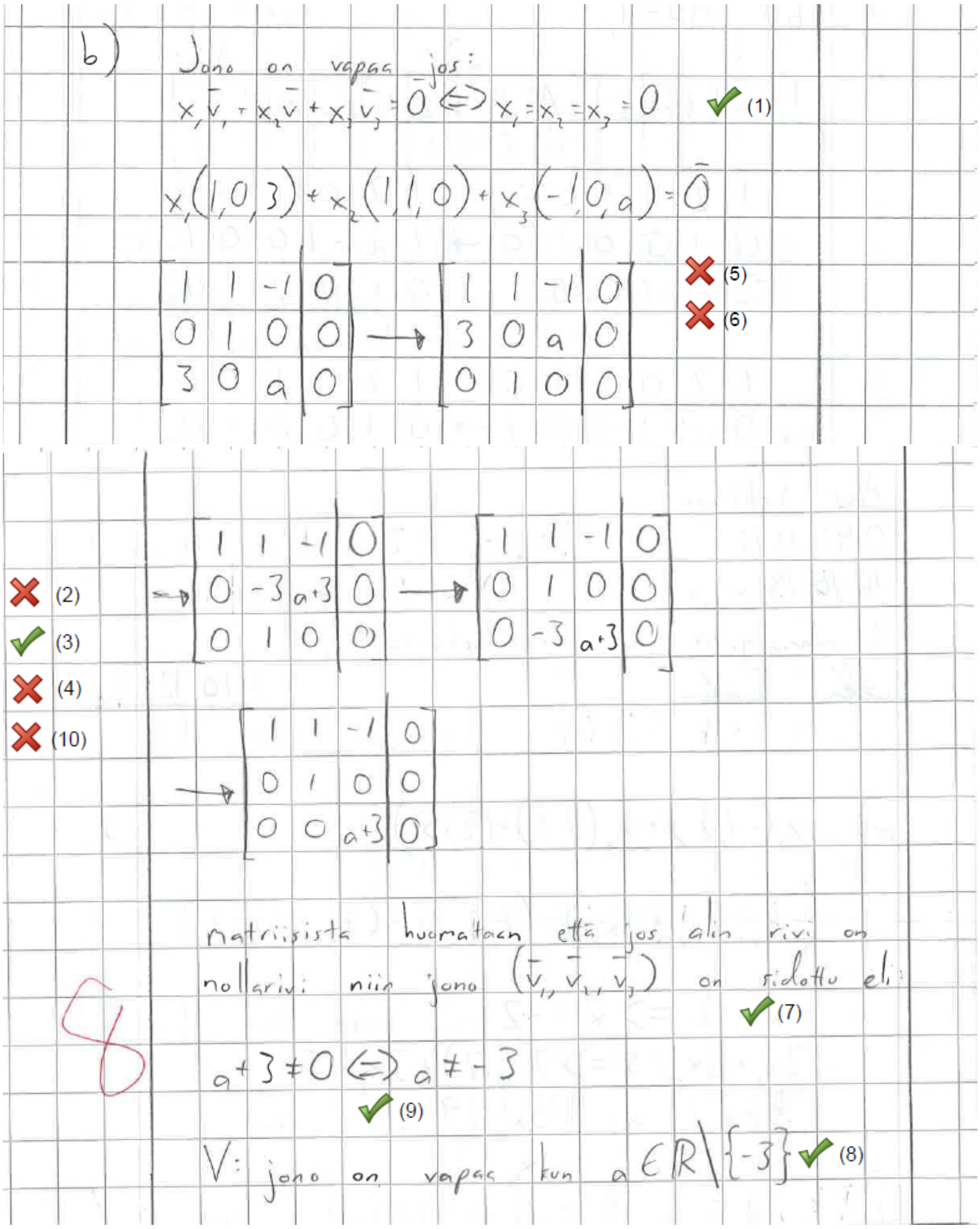
10	Vastaaja käyttää omia tai kurssin ulkopuolisia merkintöjä.	Esimerkiksi matriisi ilman matriisisulkeita, yhtälöryhmät ilman aaltosulkeita, nuoli implikaationuolen sijaan, kummallisuuksia alkeisrivitoimitusten merkitsemisessä tai nuolia vastauksen rakenteen selventämisessä.

Taulukko 4: Kirjoittamisen arvioinnissa käytetyt kriteerit.

Autenttisuuden ja arvioinnin läpinäkyvyyden lisäämiseksi arviointikriteeristöä selvennetään seuraavassa esittelemällä muutamia vastauksia ja peilaamalla niitä käytettyihin kriteereihin. Mukana on myös vastaus vähemmän käytetyllä determinantin ominaisuuksia hyödyntävällä ratkaisutavalla. Vastauksien käyttämiseen kriteeristön selventämiseksi on saatu vastaajien suostumus. Vastauksissa vihreää ✓ -merkkiä käytetään osoittamaan hyväksyttyä kriteeriä ja punaista x-merkkiä kriteeriä, jota vastaaja ei täyttänyt. Merkkien perässä on suluissa kyseisen kriteerin numero. Merkki on siinä kohdassa vastausta, jossa kyseinen kriteeri täyttyy. Osaa kriteereistä ei voi yksilöidä vastauksen tiettyyn kohtaan, jolloin ne on merkitty vastauspaperin reunaan. Kriteereistä 1–8 saa yhden pisteen, ja kriteereistä 9 ja 10 vähennetään yksi piste. Osassa vastauksia näkyvät punakynällä tehdyt merkinnät eivät liity matematiikan kirjoittamisen arviointiin.



Kuva 6: Opiskelija sai tehtävän matemaattisen sisällön arvioinnissa 6/12 ja matematiikan kirjoittamisen arvioinnissa 6/10 pistettä.



Kuva 7: Opiskelija sai tehtävän matemaattisen sisällön arvioinnissa täydet 12/12 ja matematiikan kirjoittamisen arvioinnissa 4/10 pistettä.

b) Merkitään:

$\bar{v}_1 = (1, 0, 3)$, $\bar{v}_2 = (1, 1, 0)$, $\bar{v}_3 = (-1, 0, a)$, jossa $a \in \mathbb{R}$
ja $B = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$.

Jono B on vapaa, kun kaikki vektorit, jotka kuuluvat joukkoon $J = span(B)$ voidaan esittää yksikäsitteisesti B:n lineaarikombinaatioina. Toisin sanoen yhtälölle:

$$x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{k}, \text{ jossa}$$

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ ja $\bar{k} \in J$ (2)

on olemassa vain yksi ratkaisu. (1)

Voidaan myös kirjoittaa:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} = \bar{k}$$

Edelleen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{k}$$

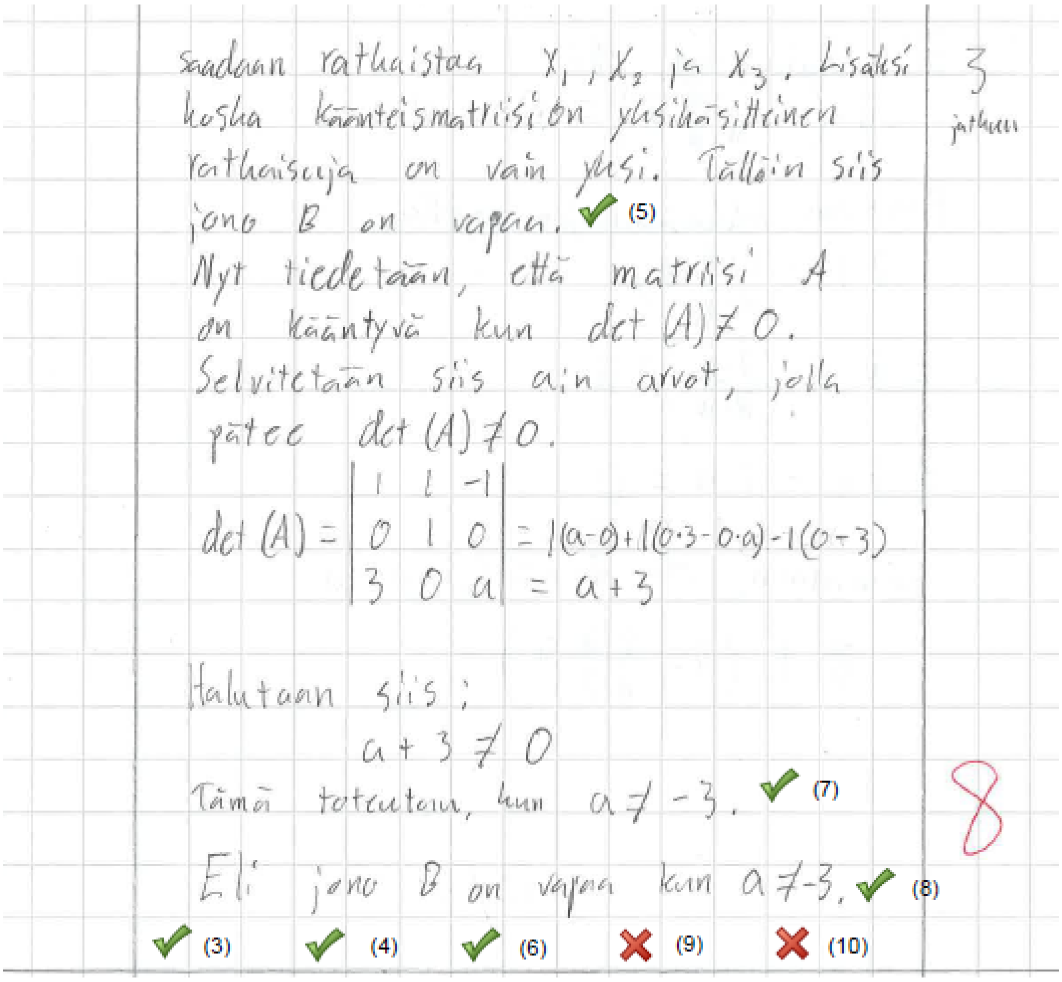
Merkitään tämä yhtälö:

$$A\bar{x} = \bar{k}$$

Huomataan, että:

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{k}$$

eli jos matriisi A on kääntyvä


Saadaan ratkaistaa x_1, x_2 ja x_3. Lisäksi koska käänteismatriisi on yksikäsitteinen ratkaisuja on vain yksi. Tällöin siis jono B on vapaa. (5)

3 jatkuu

Nyt tiedetään, että matriisi A on kääntyvä kun $\det(A) \neq 0$. Selvitetään siis a:n arvot, jolla pätee $\det(A) \neq 0$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & a \end{vmatrix} = 1(a-0)+1(0\cdot 3-0\cdot a)-1(0-3) = a+3$$

Halutaan siis:

$$a+3 \neq 0$$

Tämä toteutuu, kun $a \neq -3$. (7)

Eli jono B on vapaa kun $a \neq -3$. (8)

8

(3) (4) (6) (9) (10)

Kuva 7: Esimerkki vastauksesta determinantin ominaisuuksia käyttäen. Opiskelija sai tehtävän matemaattisen sisällön arvioinnissa täydet 12/12 ja matematiikan kirjoittamisen arvioinnissa täydet 10/10 pistettä.

4.3.3 Aineiston analysointi

Tutkimusaineisto koottiin ja analysoitiin käytättämällä Microsoft Excel –ohjelmaa ja sen analysointityökaluja. Keskeisimmiksi analysointimenetelmiksi valikoitui keskiarvon ja -hajonnan tutkiminen, Pearsonin korrelaatiokerroin sekä khiin neliö –testi muuttujien välisten (tilastollisten) riippuvuuksien analysointiin.

Pearsonin korrelaatiokerroin (r) on tilastollinen tunnusluku, joka kuvaa kahden muuttujan välisen lineaarisen riippuvuuden voimakkuutta (Heikkilä, 1998, s. 90). Korrelaatiokertoimen arvot vaihtelevat välillä $-1 \ldots +1$. Korrelaatiokertoimen tulkinnassa on käytetty alla esiteltyä asteikkoa.

$r \geq \pm 0.7$	erittäin vahva positiivinen/negatiivinen korrelaatio
$r \geq \pm 0.4$	vahva positiivinen/negatiivinen korrelaatio
$r \geq \pm 0.2$	kohtalainen positiivinen/negatiivinen korrelaatio
$r < \pm 0.2$	ei merkittävää korrelaatiota

On hyvä huomata, ettei kahden muuttujan välinen voimakaskaan lineaarinen riippuvuus välttämättä osoita muuttujien välistä syy-seuraussuhdetta (Heikkilä, 1998, s. 91). Korrelaatio ei siis tarkoita kausaliteettia. Näin on esimerkiksi tapauksessa, jossa molemmat muuttujat riippuvat samasta kolmannesta muuttujasta.

Khiin neliö –testin avulla tutkitaan muuttujien välistä tilastollista riippuvuutta ja sen merkitsevyyttä. Khiin neliö –testin tuottamien p-arvojen tulkinnassa on käytetty seuraavia rajoja (Heikkilä, 1998, s. 195):

$p < 0.001$	tilastollisesti erittäin merkitsevä
$p < 0.01$	tilastollisesti merkitsevä
$p < 0.05$	tilastollisesti melkein merkitsevä
$p \geq 0.51$	ei merkitsevä

Aineiston luokittelussa luokkien lukumäärän valinta voi tuottaa ongelmia. Metsämuurosen (2009, s. 346) mukaan hyvänä nyrkkisääntönä luokkien lukumäärälle voidaan pitää otoskoon kuutiojuurta. Tässä tapauksessa, kun otoskoko on 372 opiskelijaa, käypä luokkien lukumäärä muuttujaa kohti olisi siis noin seitsemän. Lisäksi Metsämuurosen (2009, s. 358) mukaan khiin neliö –testin soveltamista varten solufrekvenssin tulee olla vähintään yksi, mutta optimaalisesti vähintään 5 opiskelijaa. Heikkilä (1998, s. 213) määrittää kriteerit khiin neliö –testin käytölle hieman tiukemmin: jokaisen odotetun solufrekvenssin tulee olla suurempi kuin yksi, jonka lisäksi korkeintaan 20 prosenttia odotetuista frekvensseistä saa olla lukua viisi pienempiä. Luokitellun aineiston soveltuvuutta khiin neliö –testin käytölle tarkasteltaessa käytettiin Heikkilän (1998) määrittelemiä tiukempia kriteerejä. Aineiston analysoinnissa ongelmaksi kuitenkin muodostui se, että verrattaessa kahta eri muuttujaa toisiinsa luokkafrekvenssit tulivat hyvin pieniksi. Opiskelijoiden epätasaisesta jakautumisesta johtuen vaatimus luokkien lukumäärästä ja solufrekvenssien suuruudesta oli verraten vaikea täyttää. Tästä syystä luokittelussa päädyttiin ei-tasavälisiin luokkiin. Eroa tehtiin erityisesti asteikon yläpäässä, jossa luokkaväli muodostettiin tiheämmäksi.

Koepisteiden analysoinnissa käytettiin seuraavaa luokittelua: 0–23 pistettä, 24–33 pistettä, 34–43 pistettä ja 44–48 pistettä. Nämä vastaavat kurssiarvosanaksi muutettuna arvosanoja 0, 1–2, 3–4 ja 5. Lisäpisteiden analysoinnissa käytettiin tarvittaessa seuraavaa luokittelua: 0 pistettä, 1–2 pistettä, 3–4 pistettä, 5–6 pistettä sekä 7–8 pistettä. Ohjaukseen osallistumista analysoitiin sen perusteella, osallistuivatko opiskelijat ohjaukseen laisinkaan vai 1–2, 3–4 tai 5–6 viikkona. Matemaattisen kirjoittamisen arvioinnissa käytettiin luokkia 0–2, 3–4, 5–6, 7–8, ja 9–10 pistettä. Eri muuttujien välisen korrelaation voimakkuuden (Pearsonin korrelaatiokerroin) sekä tilastollista merkitsevyyden (khiin neliö -testi) tutkimisessa käytetyt luokat esitellään alla olevassa taulukossa 5.

Koepisteet	0–23	24–33	34–43	44–48	
Lisäpisteet	0	1–2	3–4	5–6	7-8
Ohjaus	0	1–2	3–4	5–6	
Kirjoituspisteet	0–2	3–4	5–6	7–8	9–10

Taulukko 5: p-arvojen laskemisessa käytetyt luokkarajat.

Osa opiskelijoista ei vastannut kurssitehtäviä palauttaessaan ohjaukseen osallistumista koskevaan kysymykseen. Aineiston analysoinnissa opiskelijoita, jotka eivät vastanneet tähän kysymykseen, käsiteltiin samalla tavalla kuin opiskelijoita, jotka eivät osallistuneet ohjaukseen. Tutkimusaineistoa analysoidessa siis oletettiin, että jos opiskelija osallistui ohjaukseen aktiivisesti, hän vastasi myös sitä koskevaan kysymykseen huolellisesti.

4.4 Luotettavuustarkastelu

Tutkimuksen otoksena käytettiin kurssikokeeseen osallistuneita 372 opiskelijaa. Näin ollen aineistosta jäivät pois sellaiset henkilöt, jotka ilmoittautuivat kurssille, mutta eivät osallistuneet kurssille aktiivisesti. Pois jäivät myös sellaiset potentiaalisesti aktiiviset opiskelijat, jotka suorittivat kurssin kurssikokeen sijasta esimerkiksi laitoksen yleistentissä. Näin ollen täysin passiiviset opiskelijat on suljettu aineiston ulkopuolelle. Vaikka muutama aktiivisestikin osallistunut opiskelija saattoi jäädä aineiston ulkopuolelle, tutkimusotos on kuitenkin sen verran laaja, että se kuvaa kurssin suorittaneita opiskelijoita varsin luotettavasti. Tutkimusta voidaan siis pitää kokonaistutkimuksena, jossa vastauskatoa ei esiinny. Tämä nostaa sekä tutkimuksen validiteettia että reliabiliteettia (Heikkilä, 1998, s. 29–30).

Tutkimusaineiston koonti tarkistettiin kertaalleen mahdollisten aineiston koontivaiheessa tapahtuneiden virheiden löytämiseksi, minkä lisäksi jokaisen muuttujan vaihteluväli tarkistettiin virheellisten arvojen varalta. Näiden toimenpiteiden avulla pyrittiin varmistamaan, ettei tutkimusaineistossa ollut virheellisiä tai väärin syötettyjä tietoja. Näin ollen tutkimusaineiston analysoinnissa näkyvät mahdolliset poikkeavat havainnot eivät käytettävissä olevan tiedon mukaan ole virheitä, jolloin niiden mukanaolo aineistossa tulee päättää erikseen tarkasteltavan ilmiön pohjalta. Osbornen ja Overbayn (2004) mukaan ei-virheellisten poikkeamien poistaminen aineistosta voi muuttaa tuloksia merkittävästi. Lisäksi aineisto edustaa todennäköisesti paremmin tutkimusotosta kokonaisuudessaan, jos ei-virheelliset poikkeamat ovat mukana aineiston analysoinnissa (Orr, Sackett & DuBois, 1991). Edellisen perusteella tutkimusaineistoa ei käsitelty poikkeavien havaintojen osalta enempää, eikä siitä poistettu yksittäisiä havaintoja.

Kurssin aikana kurssikirjanpidon perusteella huomattiin, että ohjaukseen osallistuvia opiskelijoita oli suhteellisen niukasti. Ohjaukseen osallistumista koskevaa kysymystä ”Sain ohjaajilta ohjausta tehtävien tekemiseen” muokattiinkin tutkittavan kurssin jo loputtua muotoon ”Tein tehtäviä ohjausluokassa C323 tai Ratkomossa” ja ”Juttelin ohjaajan kanssa tehtävistä”. Tämän seurauksena ohjaukseen osallistuneiden määrä kasvoi. Näin ollen tämän tutkimuksen tutkimusaineistossa eivät näy kaikki ohjaukseen todellisuudessa osallistuneet opiskelijat. Tätä voidaan pitää systemaattisena virheenä, joka heikentää tutkimuksen validiteettia (Heikkilä, 1998, s. 186). Voidaan kuitenkin olettaa, että opiskelijat vastasivat ohjaukseen osallistumista koskevaan kysymykseen totuudenmukaisesti: kynnys vastata myöntävästi vain oli liian korkea. Tutkimusaineistossa ohjaukseen osallistuneet opiskelijat todella siis osallistuivat ohjaukseen. Näin ollen tutkimustuloksiin voidaan luottaa suuntaa-antavina, vaikka niiden voimakkuus ei välttämättä kerrokaan koko totuutta.

Tutkimuksen puitteissa kaikki kurssin loppukokeeseen osallistuneiden opiskelijoiden vastaukset arvioitiin myös matematiikan kirjoittamisen osalta. Arvioinnissa käytetty kriteeristö on luotu siten, että arviointi olisi mahdollisimman helppo toistaa ja tutkimustulokset riippuisivat mahdollisimman vähän koetehtävän arvioijasta. Kriteeristöön pyrittiin subjektiivisen arvioinnin sijasta luomaan lista konkreettisista asioista, joiden ilmentyminen opiskelijan vastauksessa tarkastetaan. Osa käytetyistä kriteereistä vaikuttaa negatiivisesti opiskelijan saamaan kokonaispistemäärään. Näin ollen vastauksia arvioidessa opiskelijan saamien raakapisteiden määrä ei vielä suoraan kerro vastauksen tasosta.

Nämä kaikki nostavat arvioinnin luotettavuutta ja näin ollen koko tutkimuksen validiteettia ja reliabiliteettia. Arvioinnin luotettavuutta olisi voinut edelleen nostaa sillä, että se olisi suoritettu useampaan kertaan eri henkilöiden toimesta. Se ei kuitenkaan ollut tässä yhteydessä mahdollista.

Vastauspapereissa oli matemaattista kirjoittamista arvioidessa valmiiksi näkyvillä merkintöjä koetehtävän normaalista matemaattisen sisällön arvioinnista. Tämä ei kuitenkaan vaikuttanut tutkimustuloksiin, sillä vastaajien osallistuminen ohjaukseen tai kurssitehtävien tekeminen ei selvinnyt koepapereista. Oman haasteensa arviointiin toi se, että tutkija toimi kurssin toisena senioriohjaajana, ja oli tästä syystä ollut opiskelijoiden kanssa vuorovaikutuksessa ja tarkastanut heidän tehtäviään. Näin ollen osa vastauspapereista oli tunnistettavissa. Tilannetta kuitenkin auttoi selkeä konkreettinen arviointikriteeristö. Osaltaan tutkimuksen validiteettia heikentää se, että kurssin aikana opiskelijat ovat saaneet palautetta matematiikan kirjoittamisestaan kurssin eri ohjaajilta. On mahdollista, että eri ohjaajat kiinnittivät huomiota erilaisiin asioihin. Viikkopalaverien ja erityisesti ohjaajien periaatteiden (kts. taulukko 2) peilaamisen käytäntöön ja muiden keskustelujen lisäksi asiaan ei voinut muuten vaikuttaa. Kaikki ohjaajat olivat kuitenkin motivoituneita ja haastattelun kautta valittuja, joten voitaneen olettaa, että kaikki ohjaajat noudattivat yhdessä sovittua linjaa parhaansa mukaan.

Tutkimusten mukaan sekä arvioijan että arvioitavan sukupuolella voi olla merkittävää vaikutusta kokeen arviointiin (Haswell & Haswell, 1996; Lehtonen, 2011, s. 70; Read, Francis & Robson, 2005). Lisäksi oppilaan käsiala vaikuttaa opettajan arviointiin. Tällöin vaikka vastauksessa ei olisi tietoa vastaajan sukupuolesta, vastauksen arvioija kiinnittää tiedostamattaan huomiota vastauksen tyyliin ja sisältöön, joiden pohjalta hänelle muodostuu käsitys vastaajan sukupuolesta. Niinpä arvioija saattaa tiedostamattaan arvioinnissaan vahvistaa tunnettuja stereotypioita esimerkiksi siitä, että tytöt ovat taitavampia kirjallisessa ilmaisussa kun taas pojat pärjäävät paremmin matematiikassa. Myös arvioijan oma sukupuoli vaikuttaa arviointiin: hän arvioi oman sukupuolensa edustajia ankarammin kuin vastakkaisen sukupuolen tuottamia vastauksia (Haswell & Haswell, 1996; Lehtonen, 2011, s. 70; Read, Francis & Robson, 2005). Vähentääkseen tähän liittyvää problematiikkaa tutkija peitti kurssille osallistujien etunimet kirjauslomakkeelta. Näin ollen, vaikka vastaajan etunimi olikin näkyvissä vastauspaperilla, se ei sisältänyt kirjaamisen kannalta oleellista informaatiota, eikä siihen näin ollen rutiinin kehittyessä kiinnittänyt lainkaan huomiota. Pelkän sukunimen perusteella kirjatessa ongelmaksi voi muodostua se, että samannimisiä vastaajia saattaa olla useampia. Näissä tapauksissa vastaajat identifioitiin vastauspaperissa olleen opiskelijanumeron perusteella. Opiskelijanumero ei ole sukupuoli- eikä pääaineriippuvainen. Näin ollen opiskelijanumeron käyttäminen yksilön identifioimisessa tuki arvioinnin tasapuolisuutta. Lisäksi vastauspaperit kirjattiin aakkosjärjestyksessä, joten vaaraa siitä, että samannimiset vastaajat menisivät sekaisin, ei ollut. Tarkastettavista koetehtävistä nimen peittäminen olisi nostanut tutkimuksen luotettavuutta. Käytännön rajoitteista johtuen tämä ei ollut mahdollista.

Tutkija toimi tutkittavalla kurssilla sen toisena senioriohjaajana. Tämä oli tutkijan neljäs matematiikan ja tilastotieteen laitoksen kisällikurssi, jossa hän on ollut mukana ohjaajan roolissa. Menetelmää on sovellettu laitoksella vasta muutamia vuosia, joten se luonnollisesti kehittyy edelleen. Näin ollen tutkija on ohjaamisen lisäksi ollut mukana pohtimassa kurssien toimintatapoja ja käytänteitä. Tästä johtuen tämä tutkimus on tehty järjestelmän sisältä käsin. Tutkija on ollut menetelmästä hyvin innostunut ja tutkimusta tehdessään hän onkin ollut tietoinen osittaisesta jääviydestään ja mahdollisesta henkilökohtaisesta piiloagendastaan. Toisaalta tutkijan asema on antanut mahdollisuuden havainnoida opetusmenetelmän käytännön toteutusta lähietäisyydeltä. Tämä on osaltaan vahvistanut tutkijan käsitystä siitä, että edellä asetetut tutkimuskysymykset ovat valideja ja tehostetun kisällioppimisen menetelmän jatkokehittelyn kannalta mielenkiintoisia.

5 Tulokset

Tutkimusaineisto on koottu eri lähteistä: kurssin koetuloksista, kurssin aikana kerätyistä kurssitehtäviin ja ohjaukseen osallistumiseen liittyvistä tilastoista, sekä aikaisemmin esiteltyjen kirjoittamiskriteereiden avulla arvioidun koetehtävän tuloksista. Tutkimustulokset raportoidaan osa-alueittain. Ensin esitellään kurssin tuloksia yleisesti kurssiarvosanaan ja kurssitehtävien tekemiseen liittyen. Sen jälkeen esitetään ohjaukseen osallistumiseen liittyvät tulokset, ja lopuksi matematiikan kirjoittamiseen liittyvät tulokset.

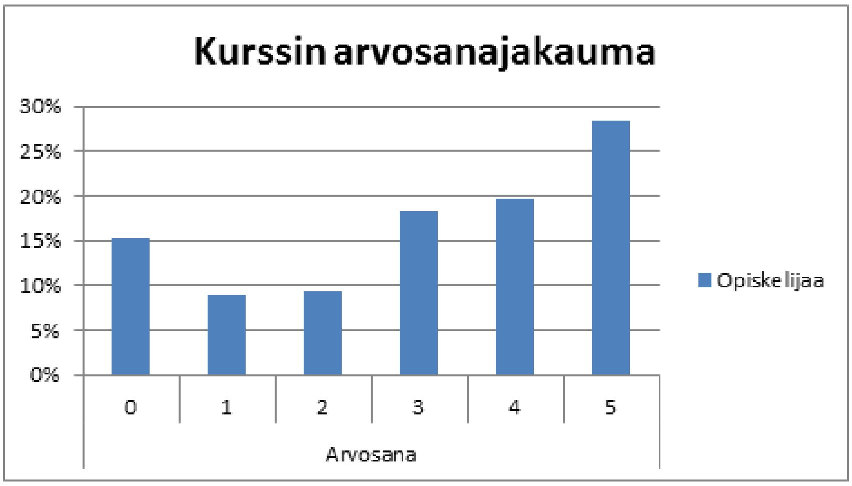
5.1 Kurssin arviointi

Kurssi arvosteltiin perinteisesti kurssikokeen perusteella asteikolla 1–5. Kurssikokeessa oli neljä tehtävää, ja kokeen enimmäispistemäärä oli 48 pistettä. Tämän lisäksi kurssin aikana tehdyistä kurssitehtävistä oli mahdollista saada kokeeseen kahdeksan lisäpistettä. Kurssin suorittamiseen hyväksytysti tarvittiin 24 pistettä ja korkeimpaan arvosanaan vaadittiin 42 pistettä. Tarkat arvosanojen pisterajat esitellään taulukossa 6.

Pisteet (koepisteet + lisäpisteet)	0	24	29	34	39	44
Arvosana	0	1	2	3	4	5

Taulukko 6: Kurssiarvosanan pisterajat.

Kurssikokeeseen osallistuneista 372 opiskelijasta kurssin läpäisi hyväksytysti 315 opiskelijaa. 33 opiskelijaa sai arvosanan 1, 35 opiskelijaa arvosanan 2, 68 opiskelijaa arvosanan 3, 73 opiskelijaa arvosanan 4 ja 106 opiskelijaa arvosanan 5. Kurssikokeeseen osallistuneiden arvosanojen keskiarvo oli 3,03 (kh=1,78). Kurssin arvosanajakauma esitellään kuvassa 8.



Kuva 8: Kurssin arvosanajakauma

5.2 Matematiikan kirjoittaminen

Opiskelijoiden matemaattista kirjoittamista arvioitiin yhden koetehtävän perusteella (N=372). Koetehtävän matemaattisen sisällön maksimipistemäärä oli 12 pistettä, ja vastanneiden keskiarvo oli 8,8 pistettä (kh=3,03). Kokeen neljästä tehtävästä kirjoittamisen osalta arvioidun tehtävän keskiarvo oli toiseksi korkein. Arvosteltu tehtävä oli siis matemaattiselta vaikeustasoltaan kohtuullinen.

Vastausten matemaattista kirjoittamista arvioitiin kymmenen kriteerin sarjalla. Kirjoituspisteitä oli siis mahdollista saada enintään 10. Saatujen kirjoituspisteiden keskiarvo oli 6,58 (kh=2,20). Kirjoittamisen arviointi noudattaa melko hyvin normaalijakaumaa. Matematiikan kirjoittamisesta jaetut pisteet esitellään kuvassa 9.

Opiskelijat osasivat erittäin hyvin kertoa, mitä tehtävässä tutkitaan. Tästä kriteeristä (kriteeri 1) pisteen sai 90 prosenttia vastaajista. Tämän lisäksi lähes kaikki vastaajista (92 %) käytti kokonaisia lauseita jossain kohtaa vastaustaan (kriteeri 3). Näin ollen täysin tekstittömiä vastauksia oli erittäin vähän. Myös johtopäätöksiä osattiin vetää hyvin: 82 prosenttia vastaajista veti sanalliset johtopäätökset tehtävän matriisista (kriteeri 7), ja 88 prosenttia vastaajista veti johtopäätökset koko tehtävään (kriteeri 8). Näin ollen vastauksen perusrakenne on hallussa suurella osaa vastaajista: kaikista kriteereistä 1, 7 ja 8 pisteitä sai 73 prosenttia opiskelijoista.

Kuva 9: Matematiikan kirjoittamisesta jaetut pisteet.

Vastaajien välille alkaa syntyä eroja vastausten sisällä. 65 prosenttia vastaajista käyttivät sanallista johdattelua yhtälönratkaisuun ja/tai matriisiin (kriteeri 5), ja vain noin puolet vastaajista (51 %) määritteli muuttujat x_1, x_2 ja x_3 (kriteeri 2). Kriteeristä 4, jonka avulla arvioitiin vastauksen kielellistä huolellisuutta, pisteitä sai 31 prosenttia vastaajista. Vastaajilla oli ongelmia myös kaavojen, matriisien ja yhtälöiden sisällyttämisessä lauseiden sisälle: ainoastaan 28 prosenttia opiskelijoista sai pisteet tästä kriteeristä (kriteeri 6). Lisäksi turhia symboleja käytti 22 prosenttia vastaajista (kriteeri 9), ja omia tai kurssin ulkopuolisia merkintöjä 12 prosenttia vastaajista (kriteeri 10). Matemaattisen kirjoittamisen arvioinnin tulokset esitellään kriteereittäin taulukossa 7.

Nro	Kriteeri	Opiskelijaa	%
1	Vastaaja kertoo, mitä tehtävässä tutkitaan.	335	90
2	Vastaaja määrittää muuttujat x_1, x_2 ja x_3.	188	51
3	Vastaaja käyttää vastauksessaan kokonaisia lauseita.	341	92
4	Vastaaja käyttää isoja kirjaimia ja pisteitä.	155	31
5	Vastaaja johdattelee yhtälönratkaisuun ja/tai matriisiin (riippuen vastaustavasta).	240	65
6	Vastaaja sisällyttää käyttämänsä kaavat, matriisit ja yhtälöt lauseiden sisälle.	106	28
7	Vastaaja vetää sanalliset johtopäätökset saadusta matriisista.	306	82
8	Vastaaja vetää sanalliset johtopäätökset koko tehtävään.	329	88
9	Vastaaja käyttää symboleja sanojen asemasta tai liiallisesti turhia lyhenteitä.	83	22
10	Vastaaja käyttää omia tai kurssin ulkopuolisia merkintöjä.	45	12

Taulukko 7: Matematiikan kirjoittamisen arviointi kriteereittäin.

Pääaineopiskelijat menestyivät jokaisen arviointikriteerin kohdalla keskimäärin sivuaineopiskelijoita paremmin. Suurin ero, yli 20 prosenttiyksikköä, muodostui kriteerissä 6. Näin ollen kaavojen, matriisien ja yhtälöiden sisällyttäminen lauseiden sisälle oli sivuaineopiskelijoille huomattavasti haastavampaa. Pää- ja sivuaineopiskelijoiden välisiä eroja kuvataan taulukossa 8.

Kriteeri	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Kaikki (%, ka)	90	51	92	31	65	28	82	88	22	12
Pääaineopiskelijat (%, ka)	94	56	93	37	73	40	86	94	20	10
Sivuaineopiskelijat (%, ka)	86	45	90	26	57	18	79	84	24	14

Taulukko 8: Matemaattisen kirjoittamisen arviointi pää- ja sivuaineopiskelijoiden välillä kriteereittäin. Huomaa, että kriteerit 9 ja 10 vaikuttavat kokonaispisteisiin negatiivisesti.

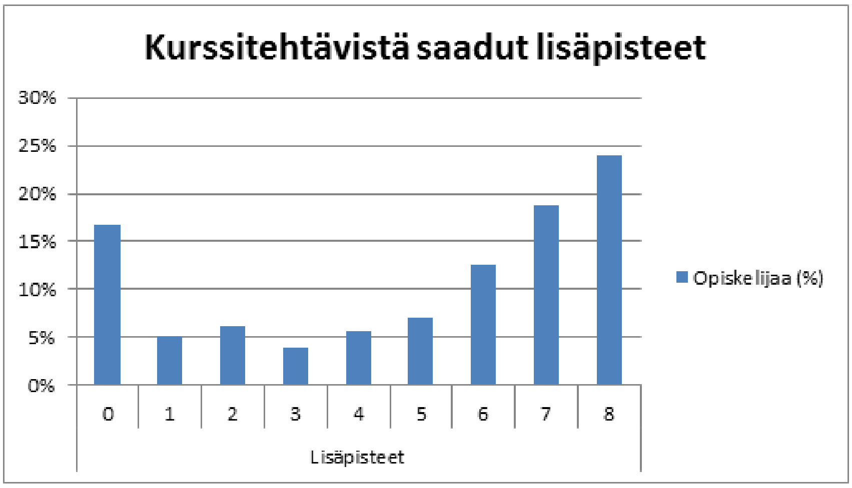
Matemaattisen kirjoittamisen ja koepisteiden välistä yhteyttä tutkittaessa näyttää siltä, että kyseiset muuttujat ovat positiivisesti riippuvaisia toisistaan. Yhdeksän tai kymmenen kirjoituspistettä saanut opiskelija sai keskimäärin 15 koepistettä enemmän kuin alle viisi kirjoituspistettä saanut opiskelija. Kirjoittamispisteiden ja koepisteiden välistä korrelaatiota tarkasteltiin khiin neliö –testillä, jonka p-arvoksi saatiin $p<0{,}001$. Näin ollen matematiikan kirjoittamisesta ja kurssikokeesta saadut pisteet riippuvat tilastollisesti erittäin merkitsevästä toisistaan. Pearsonin korrelaatiokertoimen arvoksi mitattiin $r=0{,}47$, joka tukee muuttujien välisen vahvan positiivisen korrelaation olemassaoloa. Matemaattisesta kirjoittamisesta saatujen pisteiden suhdetta koemenestykseen kuvataan taulukossa 9.

Kirjoitus-pisteet	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Koepisteet (ka)	20,3	-	11,3	25,0	29,2	26,8	29,9	31,8	34,8	36,8	36,4
Keskihajonta	11,9	-	11,7	10,3	10,0	9,2	10,2	8,4	6,9	6,6	7,4

Taulukko 9: Matematiikan kirjoittamisesta saatujen pisteiden ja koemenestyksen välinen suhde.

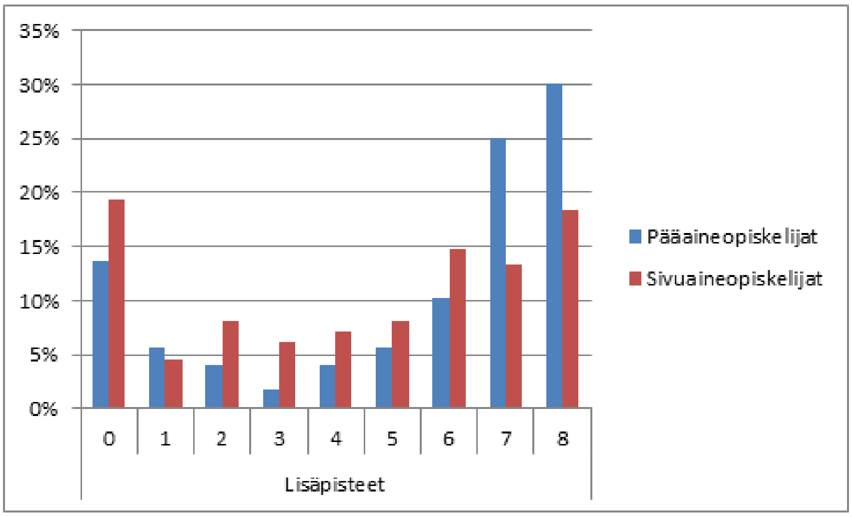
5.3 Kurssitehtävät

Kurssitehtäviä tekemällä oli mahdollista saada yhteensä kahdeksan lisäpistettä. Kurssin opiskelijoista 17 prosenttia ei saanut lainkaan lisäpisteitä. Suuri osa opiskelijoista kuitenkin palautti kurssitehtäviä aktiivisesti: 55 prosenttia opiskelijoista sai vähintään kuusi lisäpistettä. Keskimäärin opiskelijat saivat 4,89 lisäpistettä (kh=2,97). Opiskelijoiden kurssitehtävistä saamat lisäpisteet esitellään kuvassa 10.



Kuva 10: Kurssitehtävien tekemisestä saadut lisäpisteet.

Pääaineopiskelijat tekivät sivuaineopiskelijoihin verrattuna enemmän kurssitehtäviä. Pääaineopiskelijoiden lisäpisteiden keskiarvo on 5,40, kun sivuaineopiskelijoilla vastaava keskiarvo on 4,37. Pääaineopiskelijoista 65 prosenttia sai 6–8 lisäpistettä, kun sivuaineopiskelijoista vastaavaan ylsi 46 prosenttia opiskelijoista. Kurssitehtävien tekemiseen liittyvää eroa pää- ja sivuaineopiskelijoiden välillä selvennetään kuvassa 11.



Kuva 11: Pää- ja sivuaineopiskelijoiden kurssitehtävien tekemisestä saamat lisäpisteet.

Kurssin aikana kurssitehtäviä palautti koko ajan vähemmän opiskelijoita. Ensimmäisellä viikolla kurssitehtäviä palautti 89 prosenttia kurssille ilmoittautuneista, mutta kurssin viimeisellä viikolla tehtäviä palautti enää 69 prosenttia opiskelijoista. Myös kurssitehtäviä palauttaneiden opiskelijoiden tehtyjen tehtävien määrä laski tasaisesti. Ensimmäisellä viikolla tehtäviä palauttanut opiskelija teki keskimäärin 89 prosenttia kyseisen viikon tehtävistä, mutta 6. viikolla enää keskimäärin 56 prosenttia tehtävistä. Tarkasteltaessa tehtyjen kurssitehtävien lukumäärää viikoittain keskihajonta on kuitenkin niin suurta, että tehtäviä palauttaneissa on todennäköisesti paljon erilaisia opiskelijoita. Kurssitehtävien palauttaminen viikoittain esitetään taulukossa 10.

	Vko 1	**Vko 2**	**Vko 3**	**Vko 4**	**Vko 5**	**Vko 6**
Tehtäviä palauttaneita opiskelijoita (%)	89,0	82,3	84,9	82,0	76,6	68,8
Palautettuja tehtäviä (% maksimista)	88,5	72,0	77,1	67,3	63,6	56,4
Keskihajonta (tehtävää)	4,29	5,44	4,74	5,22	5,69	5,74

Taulukko 10: Kurssitehtävien palauttaminen viikoittain.

Kurssitehtävien tekeminen ja kurssikokeesta saatu pistemäärää riippuvat positiivisesti toisistaan. Kurssitehtävistä saatujen lisäpisteiden ja koepisteiden välinen suhde esitetään taulukossa 11. Sen perusteella tulos on selkeä: mitä enemmän opiskelija teki tehtäviä kurssin aikana, sitä korkeammat pisteet hän sai kurssin loppukokeesta. Jos opiskelija palautti yli 90 prosenttia sekä tähdettömiä että tähdellisiä tehtäviä, hän sai kurssin loppukokeesta keskimäärin 14,9 pistettä enemmän kuin alle 45 prosenttia tehtävistä palauttanut kanssaopiskelijansa ($p<0,001$). Lisäpisteiden ja koepisteiden välinen korrelaatio on siis tilastollisesti erittäin merkitsevä. Lisäksi Pearsonin korrelaatiokertoimen arvoksi saatiin $r=0,50$, joka tarkoittaa muuttujien välistä vahvaa positiivista korrelaatiota. On hyvä huomata, että kurssitehtäviä vähän palauttaneiden osalta kurssikokeen pistemäärässä on eniten hajontaa.

Lisäpisteet	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Koepisteet	21,9	27,0	26,7	27,3	29,2	31,9	33,5	33,5	36,5
Keskihajonta	12,7	9,0	9,4	9,5	9,8	9,4	7,4	7,4	7,0

Taulukko 11: Kurssitehtävien tekemisestä saatujen lisäpisteiden ja koepisteiden välinen suhde.

Verratessa kurssitehtäviä tekemällä saatuja lisäpisteitä matematiikan kirjoittamisesta saatuihin pisteisiin näyttää siltä, että, mitä enemmän opiskelija on tehnyt kurssitehtäviä, sitä paremmat pisteet hän saa matematiikan kirjoittamisessa. Paljon kurssitehtäviä (7–8 lisäpistettä) tehnyt opiskelija sai matematiikan kirjoittamisen arvioinnissa keskimäärin kaksi pistettä enemmän kuin vain vähän (0–2 lisäpistettä) kurssitehtäviä tehnyt kanssaopiskelijansa. Khiin neliö –testi antaa lisäpisteiden ja kirjoituspisteiden välille tilastollisesti erittäin merkitsevän riippuvuuden ($p<0{,}001$). Myös Pearsonin korrelaatiokerroin $r=0{,}48$ osoittaa vahvaa positiivista korrelaatiota. Lisäpisteiden ja kirjoituspisteiden välistä suhdetta kuvataan taulukossa 12.

Lisäpisteet	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Kirjoituspisteet (ka)	4,8	5,3	6,2	5,5	5,8	6,9	7,2	7,0	7,9
Keskihajonta	2,3	2,2	1,8	1,7	2,3	2,1	1,8	1,7	1,8

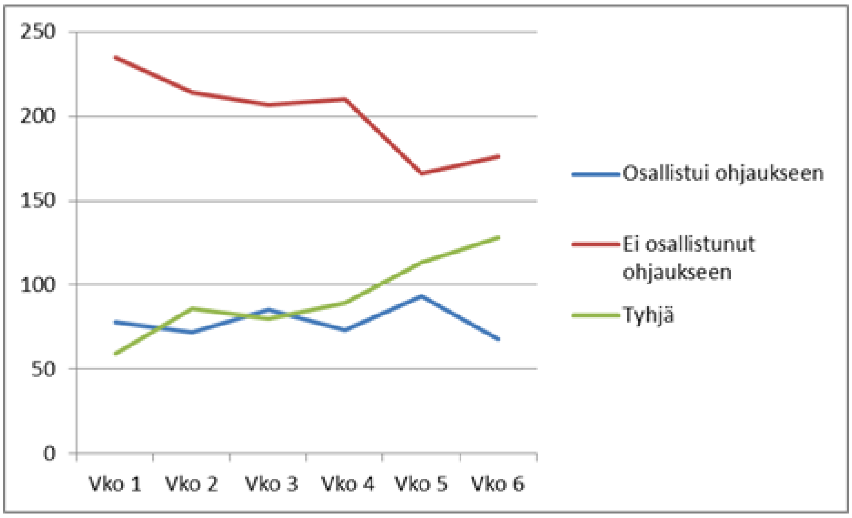
Taulukko 12: Lisäpisteiden ja matematiikan kirjoittamisesta saatujen pisteiden välinen suhde.

5.4 Ohjaukseen osallistuminen

Kurssin aikana ohjausluokka oli avoinna joka päivä. Ohjaukseen osallistuminen oli vapaaehtoista mutta suotavaa. Ohjaus toteutettiin tehostetun kisällioppimisen periaatteita noudattaen. Otoksen (N=372) opiskelijoista ohjaukseen osallistui viikoittain noin 80 opiskelijaa. Keskimäärin 200 opiskelijaa viikossa ei osallistunut ohjaukseen lainkaan, ja kansilehdessä olevaan ohjauksessa käymistä koskevaan kysymykseen jätti vastaamatta keskimäärin 90 opiskelijaa. Ohjaukseen osallistuvien opiskelijoiden lukumäärä pysyi suhteellisen tasaisena koko kurssin ajan. Eniten ohjaukseen osallistujia oli viikolla 5, jolloin ohjausta sai 93 opiskelijaa. Kurssin viimeinen viikko oli ohjaussalissa hiljaisin: tällöin ohjaukseen osallistui ainoastaan 68 opiskelijaa. Ohjauskysymykseen vastaamattomien opiskelijoiden määrä kasvoi kurssin aikana. Tämä selittänee osin ohjaukseen osallistumattomien opiskelijoiden määrän laskun kurssin aikana. Aineiston myöhemmässä analysoinnissa ohjausta koskevan kysymyksen vaille vastausta jättäneitä opiskelijoita käsitellään kuten opiskelijoita, jotka eivät osallistuneet ohjaukseen. Viikkokohtaiset ohjaukseen osallistumismäärät esitellään taulukossa 13 ja kuvassa 12.

Vko	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Ka**	**Kh**
Osallistui ohjaukseen	78	72	85	73	93	68	78,2	9,3
Ei osallistunut ohjaukseen	235	214	207	210	166	176	201,3	25,7
Tyhjä	59	86	80	89	113	128	92,5	24,6

Taulukko 13: Opiskelijoiden osallistuminen ohjaukseen kurssin aikana.



Kuva 12: Opiskelijoiden osallistuminen ohjaukseen kurssin aikana.

Aineiston perusteella näyttää siltä, että ohjaukseen osallistumisella ei ole vaikutusta kurssikokeesta saatuihin pisteisiin. Koepisteiden keskiarvo on alhaisin niillä opiskelijoilla, jotka eivät osallistuneet kurssin aikana ohjaukseen laisinkaan. Koepisteiden keskiarvoissa ei kuitenkaan ole näkyvissä selkeää trendiä, minkä lisäksi keskihajonta on kohtalaisen suurta. Myöskään khiin neliö -testin perusteella ohjaukseen osallistumisen ja kokeesta saatujen pisteiden välinen korrelaatio ei ole tilastollisesti merkitsevä (p=0,106), ja Pearsonin korrelaatiokertoimen (r=0,08) mukaan yhteyttä näiden muuttujien välillä ei ole. Ohjaukseen osallistumisen ja koepisteiden välinen suhde on esitetty taulukossa 14.

Ohjaukseen osallistuminen (kertaa)	0	1	2	3	4	5	6
Koepisteet (ka)	30,3	31,3	30,4	33,8	31,4	30,5	35,5
Keskihajonta	11,0	11,2	9,6	7,1	6,5	10,6	5,6

Taulukko 14: Ohjaukseen osallistumisen suhde kurssikokeesta saatuihin pisteisiin.

Ohjaukseen osallistumisen ja kirjoituspisteiden välistä yhteyttä tutkittaessa saatiin koepisteistä hieman poikkeavia tuloksia. Ohjaukseen aktiivisesti (5–6 kertaa) osallistunut opiskelija sai keskimäärin 1,6 kirjoituspistettä enemmän kuin ohjaukseen osallistumaton kanssaopiskelijansa. Muuttujien välinen tilastollinen riippuvuus on melkein merkitsevä (p=0,016). Pearsonin tulomomenttikertoimen r=0,21 mukaan muuttujien välinen korrelaatio on heikko. Ohjaukseen osallistumisen osuus matematiikan kirjoittamisessa menestymiseen on siis pieni mutta melkein tilastollisesti merkitsevä. Ohjaukseen osallistumisen yhteyttä matemaattisesta kirjoittamisesta saatuihin pisteisiin esitellään taulukossa 15.

Ohjaukseen osallistuminen (kertaa)	0	1	2	3	4	5	6
Kirjoituspisteet (ka)	6,2	6,7	6,5	6,8	7,4	7,6	8,1
Keskihajonta	2,3	2,2	1,8	1,9	1,8	2,3	1,7

Taulukko 15: Ohjaukseen osallistumisen suhde matematiikan kirjoittamisesta saatuihin pisteisiin.

Tarkastellessa matemaattista kirjoittamista kriteereittäin huomataan, että ohjaukseen enemmän osallistuneet pärjäsivät jokaisen kriteerin kohdalla paremmin kuin ohjaukseen osallistumattomat. Opiskelijat, jotka osallistuivat ohjaukseen 3–4 viikkona, saivat keskimäärin parhaat tulokset kriteereissä 1, 3 ja 10. Kaikissa muissa kriteereissä keskimäärin parhaat tulokset saivat viitenä tai kuutena viikkona ohjaukseen osallistuneet opiskelijat. Erityisen suuret erot 5–6 kertaa ohjaukseen osallistuneiden eduksi ovat kriteereissä 4, 5 ja 6. Näiden kriteerien avulla arvioitiin vastauksen kielellistä laatua sekä yhtälöiden ja kaavojen sisällyttämistä tekstiin johdonmukaisesti ja kieliopillisesti oikein.

Ohjaukseen osallistumisen ja tehtävien tekemisestä saatujen lisäpisteiden välinen riippuvuus on selvästi positiivinen. Opiskelijat, jotka osallistuivat ohjaukseen joka viikko, saivat keskimäärin 3,18 lisäpistettä enemmän kuin ohjaukseen osallistumattomat kurssitoverinsa ($p<0{,}001$). Tulos on tilastollisesti erittäin merkitsevä. Pearsonin korrelaatiokertoimen arvoksi saatiin $r=0{,}32$, joka kertoo kohtalaisesta positiivisesta riippuvuudesta muuttujien välillä. Ohjaukseen osallistumisen ja kurssitehtävien tekemisestä saatujen lisäpisteiden välinen suhde on esitetty taulukossa 16.

Ohjaukseen osallistuminen (kertaa)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Lisäpisteet (ka)	4,1	4,9	5,5	6,2	5,8	6,9	7,3
Keskihajonta	3,1	2,7	2,7	2,3	2,3	1,7	1,1

Taulukko 16: Ohjaukseen osallistumisen suhde kurssitehtävien tekemisestä saatuihin lisäpisteisiin.

6 Pohdintaa

Tehostetun kisällioppimisen menetelmä on ollut käytössä Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksella vuodesta 2011 lähtien. Laitoksella on tehty opetuksen kehittämistyötä jo pitkään (kts. Oikkonen, 2009; Hautala, 2010), jonka puitteissa huomattiin opetuksen kehittämiselle olevan edelleen tarvetta. Kuten Hautala kumppaneineen (2012) toteaa, ongelmana oli, että opiskelijat kurssien läpäisystään huolimatta kohtasivat vaikeuksia myöhemmissä opinnoissaan, sillä oppiminen oli ollut pinnallista. Tehostetun kisällioppimisen menetelmä tuotiin Helsingin yliopiston tietojenkäsittelytieteen laitoksen positiivisista kokemuksista innostuneena viitekehykseksi myös matematiikan ja tilastotieteen laitoksen opetukseen (Hautala ym., 2012; Vikberg, 2012). Tehostettu kisällioppiminen korostaa tekemällä oppimista ja jatkuvan palautteen tärkeyttä, sekä oppimisen sosiaalista kontekstia (Collins ym., 1991; Vihavainen ym., 2011a).

Tehostetun kisällioppimisen menetelmällä opetettavilla kursseilla kurssitehtävät ovat erittäin keskeisessä roolissa, ja palautettavia tehtäviä on viikoittain. Tehtävien tekemiseen on saatavilla ohjausta joka arkipäivä usean tunnin ajan. Käytännössä menetelmässä panostetaan tehtävien tarkistamiseen ja kommentoimiseen, sekä erityisesti opiskelijoiden ohjaukseen, joka on tuen näkyvin muoto. Siksi tässä tutkielmassa yksi keskeisimmistä teemoista on kurssitehtävien tekemisen ja ohjaukseen osallistumisen vaikuttavuus opiskelijoiden oppimistuloksiin. Opiskelijoiden osaamista arvioitiin kurssin Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I kurssikokeella, sekä arvioimalla yksi kurssikokeen tehtävistä matemaattisen kirjoittamisen osalta. Useat tutkijat ovat sitä mieltä, että matematiikan kielelliset elementit ja niiden hallinta ovat keskeisiä matematiikan osaamisen osa-alueita (NCTM, 2000; Pimm, 1987, s. 109; Usiskin, 1996), ja matemaattisen kirjoittamisen arviointi antaa laajempaa tietoa opiskelijan matemaattisesta osaamisesta ja syvällisestä ymmärtämisestä (Adu-Gyamfi ym., 2010; McCormick, 2010; Pugalee; 2001). Näin ollen matematiikan kirjoittamisen tutkiminen on perusteltua.

Kurssin suoritti hyväksytysti 84,7 prosenttia kurssikokeeseen osallistuneista opiskelijoista. Kurssin maksimiarvosana oli 5, ja annettujen arvosanojen keskiarvo oli 3,03 (kh=1,78). Matematiikan kirjoittamisen arvioinnissa tarkastelun kohteena ollut tehtävä oli kurssikokeen neljästä tehtävästä tulosten keskiarvon perusteella toiseksi helpoin. Tehtävän matemaattisen sisällön arvioinnissa maksimipistemäärä oli 12 ja matemaattisen kirjoittamisen arvioinnissa

10 pistettä. Matemaattisen sisällön arvioinnissa tehtävän pistekeskiarvo oli 8,8 pistettä (kh=3,03), kun matemaattisen kirjoittamisen osalta vastaava keskiarvo oli 6,58 pistettä (kh=2,20). Matemaattisesta kirjoittamisesta jaetut pisteet ovat normaalijakautuneita, jonka perusteella kirjoittamisen arvioinnissa käytettyä kriteeristöä voidaan pitää onnistuneena.

Kirjoittamisen arviointia lähemmin tarkastellessa huomataan, että matemaattisen vastauksen perusrakenne, jota Selden ja Selden (2003) kutsuu todistuksen viitekehykseksi, on hallussa 73 prosentilla vastaajista. Todistuksen viitekehys pitää sisällään kysymyksen asettelun ja siihen vastaamisen. Näitä tutkittiin kriteereillä 1, 7 ja 8, joista kriteeriä yksittäin tarkasteltaessa pisteitä sai 90, 82 ja 88 prosenttia opiskelijoista. Kirjoittamisen arvioinnissa erot vastaajien välille syntyvätkin vastausten sisällä. Erityisen haastavaa oli kaavojen, matriisien ja yhtälöiden sisällyttäminen lauseiden sisälle, jossa onnistui ainoastaan 28 prosenttia opiskelijoista. Myös huolellisuus vastauksen loogisessa rakenteessa ja kielellisessä huolellisuudessa oli haastavaa: kriteeristä 4 pisteitä sai 31 prosenttia opiskelijoista. Vastauksessa käytetyt muuttujat määritti noin puolet vastaajista, ja 65 prosenttia opiskelijoista käytti sanallista johdattelua yhtälönratkaisuun tai käyttämiinsä matriiseihin. Sanojen sijasta käytettyjä turhia symboleita käytti noin viidesosa ja omia merkintöjä reilu kymmenesosa opiskelijoista.

Pääaineopiskelijat saivat jokaisessa kirjoittamisen arvioinnissa käytetyssä kriteerissä keskimäärin sivuaineopiskelijoita enemmän pisteitä. Suurin ero muodostui kriteerissä 6. Näin ollen kaavojen, matriisien ja yhtälöiden sisällyttäminen lauseiden sisälle oli sivuaineopiskelijoille huomattavasti pääaineopiskelijoita haastavampaa. Tutkijoiden mukaan matematiikan kielellinen osaaminen kuvastaa aihealueen syvällistä ymmärtämistä (Adu-Gyamfi ym., 2010; Ko & Knuth, 2009; Weber, 2001). Tässä valossa on täysin luonnollista, että pääaineopiskelijalla on kokonaisvaltaisempi ymmärrys matematiikasta.

Matemaattisen kirjoittamisen arvioinnissa saatujen pisteiden ja koepisteiden välistä suhdetta tutkittaessa huomattiin, että matematiikan kirjoittamisessa erinomaisesti (9–10 pistettä) menestyneet opiskelijat saivat kurssikokeessa keskimäärin 15 pistettä enemmän kuin kirjoittamisessa heikosti (alle 5 pistettä) menestyneet opiskelijat. Kyseisten muuttujien välinen vahva positiivinen korrelaatio ($r=0{,}47$) on tilastollisesti erittäin merkitsevä ($p<0{,}001$). Tulokset saavat tukea esimerkiksi Adu-Gyamfilta ja kumppaneilta (2010) ja McCormickilta (2010), joiden mukaan matematiikan kirjallisen ilmaisun hallinta on merkki matematiikan syvällisestä ymmärtämisestä. Tältä osin matematiikan kirjoittamisen tutkimiseen käytetty kriteeristö vaikuttaa onnistuneelta.

Kurssin aikana opiskelijoilla oli mahdollisuus tehdä kurssitehtäviä, joita palauttamalla sai lisäpisteitä kurssikokeeseen. Kaiken kaikkiaan oli mahdollista kerätä yhteensä kahdeksan lisäpistettä. Keskimäärin opiskelijat saivat 4,89 lisäpistettä (kh=2,97). Pääaineopiskelijoiden lisäpistekeskiarvo (5,40) oli yli pisteen korkeampi verrattuna sivuaineopiskelijoiden vastaavaan keskiarvoon (4,37). Ylipäätään kurssitehtäviä palautettiin ahkerasti: 55 prosenttia kaikista opiskelijoista sai vähintään kuusi lisäpistettä, jonka saavutti tekemällä vähintään 75 prosenttia kaikista tehtävistä. Pääaineopiskelijat tekivät kurssitehtäviä sivuaineopiskelijoita ahkerammin. Pääaineopiskelijoista yli kuusi lisäpistettä saavutti 65 prosenttia opiskelijoista, kun sivuaineopiskelijoiden vastaava osuus oli 46 prosenttia.

Kurssitehtävien aktiivinen ratkaiseminen on keskeinen osa kisällikurssien tekemällä oppimisen tavoitetta. Tältä osin kurssin tavoite siis saavutettiin. Pääaineopiskelijoiden saamat keskimäärin korkeammat lisäpisteet selittynevät suuremmalla motivaatiolla sekä sillä, että ohjaussali, jossa tehtävien tekemiselle oli saatavissa tukea, sijaitsee matematiikan ja tilastotieteen laitoksella. Näin ollen sivuaineopiskelijalla ei välttämättä ole mahdollisuutta osallistua ohjaukseen samassa määrin kuin pääaineopiskelijoilla, ja tästä syystä tehtävien tekeminen jää vähemmälle.

Kurssin edetessä tehtäviä palauttaneiden opiskelijoiden määrä väheni tasaisesti. Ensimmäisellä viikolla tehtäviä palautti 89 prosenttia opiskelijoista, kun kurssin viimeisellä viikolla tehtäviä palautti enää 69 prosenttia opiskelijoista. Samalla myös tehtäviä palauttaneiden opiskelijoiden tehtyjen tehtävien keskiarvo laski: ensimmäisellä viikolla tehtäviä palauttanut opiskelija teki keskimäärin 89 prosenttia viikkotehtävistä, kun taas viimeisellä viikolla tehtäviä palauttanut opiskelija teki keskimäärin enää 56 prosenttia tehtävistä. Tehtävien tekemisen aktiivisuuden laskuun vaikuttaa se, että osa opiskelijoista on jo palauttanut tehtäviä tavoittelemansa määrän lisäpisteitä edestä. Lisäksi tehtävien tekemisen lasku johtuu ainakin osittain siitä, että lukuvuoden edetessä opiskeltavat asiat vaikeutuvat ja eri kurssien työmäärät kasaantuvat. Tehtäviä palauttaneiden opiskelijoiden lukumäärää sekä heidän tekemien tehtävien keskiarvoa viikoittain tarkasteltaessa keskihajonta on kuitenkin joka viikko niin suurta, ettei voida sanoa kurssin opiskelijoiden seuraavan yhtä selkeää trendiä. Näin ollen osa kurssin opiskelijoista palautti suurimman osan tehtävistä joka viikko, osa koko ajan vähemmän ja osa kurssin alusta lähtien vain vähän tai ei juuri ollenkaan. Tehtävien tekemisen aktiivisuuden lasku on myös tuttua jo aikaisempien vuosien vastaavilta kursseilta (Rämö & Vikberg, 2014).

Kurssitehtävien tekeminen ja kurssikokeessa menestyminen ovat positiivisesti riippuvaisia toisistaan. Opiskelija, joka palautti yli 90 prosenttia tehtävistä ja sai näin ollen täydet kahdeksan lisäpistettä, sai kurssikokeesta keskimäärin 14,9 pistettä enemmän kuin alle 45 prosenttia tehtävistä palauttanut ei ilman lisäpisteitä jäänyt kanssaopiskelijansa. Kurssitehtäviä tekemällä saatujen lisäpisteiden ja koepisteiden välinen korrelaatio on tilastollisesti erittäin merkitsevä ($p<0{,}001$). Lisäksi Pearsonin korrelaatiokertoimen arvo $r=0{,}50$ osoittaa muuttujien välisen vahvan positiivisen korrelaation. Voidaankin sanoa, että kurssitehtäviä tekemällä oppii kurssin sisällön hyvin. Tämä on linjassa tehostetun kisällioppimisen perusperiaatteiden, tekemällä oppimisen ja jatkuvan palautteen saamisen tärkeyden kanssa (Vihavainen ym., 2011a). Tulos ei sinällään ole yllätys, sillä palautettujen kurssitehtävien lukumäärä kertoo omalta osaltaan opiskelijat aktiivisesta osallistumisesta kurssille.

Lisäpisteiden vaikutusta koepisteisiin tarkasteltaessa huomattiin myös, että alle 45 prosenttia kurssitehtäviä palauttaneiden, eli ei laisinkaan lisäpisteitä keränneiden opiskelijoiden koepisteiden keskihajonta oli 12,67 pistettä. Tämä vastaa neljäsosaa koko kurssikokeen pistemäärästä. Näin ollen osa opiskelijoista, jotka eivät aineiston perusteella aktiivisesti tehneet kurssitehtäviä, menestyivät silti kurssikokeessa hyvin. Tämä voi johtua osittain siitä, että kurssille osallistuvilla opiskelijoilla on erilaisia taustoja. Tällöin osa opiskelijoista saattaa tehdä kurssitehtäviä palauttamatta niitä tarkastukseen, opiskella mallivastausten avulla, tai kokea kurssin asiat ja matemaattisen sisällön sen verran helpoksi, ettei näe tehtävien aktiiviselle palauttamiselle olevan tarvetta.

Kurssitehtävien tekeminen ja matematiikan kirjoittamisesta saadut pisteet ovat positiivisesti riippuvaisia toisistaan. Paljon kurssitehtäviä (7–8 lisäpistettä) tehnyt opiskelija sai matematiikan kirjoittamisen arvioinnissa keskimäärin 20 prosenttia enemmän pisteitä kuin vain vähän (0–2 lisäpistettä) kurssitehtäviä tehnyt kanssaopiskelijansa. Lisäpisteiden ja kirjoituspisteiden välinen vahva positiivinen korrelaatio ($r=0{,}48$) on tilastollisesti erittäin merkitsevä ($p<0{,}001$). Kurssitehtävien tekemisen ja matematiikan kirjoittamisen välinen suhde tukee tehostetun kisällioppimisen keskeistä tekemällä oppimisen tavoitetta.

Kurssin aikana ohjaukseen osallistui keskimäärin 78 opiskelijaa viikossa. Tämä vastaa 21 prosenttia koko kurssin opiskelijoista. Keskimäärin 201 opiskelijaa ei osallistunut ohjaukseen ollenkaan, jonka lisäksi keskimäärin 93 opiskelijaa jätti vastaamatta ohjaukseen osallistumista koskevaan kysymykseen. Ohjaukseen osallistui siis keskimäärin ainoastaan noin joka viides kurssin opiskelijoista. Ohjaukseen osallistuvien opiskelijoiden vähyys huomattiin kurssin aikana, minkä vuoksi ohjaukseen osallistumista koskevaa kysymystä muokattiin tutkittavan kurssin jo loputtua. Uudelleen muotoilluilla kysymyksillä ohjaukseen osallistuvien määrä saatiin muilla kursseilla suuremmaksi. Näin ollen tämä tutkimus ei anna täysin oikeaa kuvaa ohjaukseen osallistumisen osalta. Ohjauksen osallistumisen tekemistä vielä suositummaksi tulisi kuitenkin edelleen pohtia tulevilla kisällikursseilla: se luo perustan Collinsin ja kumppaneiden (1991) painottamalle sosiaalisen kontekstin muodostumiselle ja yhteisölle, jonka jäseneksi halutaan kasvaa.

Tutkimusaineiston perusteella ohjaukseen osallistumisen ja kurssikokeesta saadun pistemäärän väliseen yhteyteen ei voida ottaa kantaa. Ohjaukseen osallistumisen ja kurssikokeesta saadun pistemäärän välistä korrelaatiota tutkittiin ensin keskiarvoilla, joiden perusteella selkeää trendiä ei ollut havaittavissa, sekä khiin neliö -testillä, jonka p-arvoksi saatiin p=0,106. Näin ollen muuttujien välinen lähes mitätön korrelaatio (r=0,08) ei ole tilastollisesti merkitsevä. Tämän perusteella ohjaukseen osallistuu sekä opiskelijoita, jotka tarvitsevat tukea matemaattisen sisällön hallinnassa, että niitä, jotka kokevat ohjaukseen osallistumisen luontevana tapana oppia ja opiskella matematiikkaa. Ohjaukseen osallistumisella ei siis ole suoraa korrelaatiota kurssikokeella mitatun matemaattisen osaamisen kanssa.

Tilanne on eri, kun matemaattista osaamista tarkastellaan matematiikan kirjoittamisen näkökulmasta. Tarkastellessa ohjaukseen osallistumisen suhdetta matematiikan kirjoittamisesta saatuihin pisteisiin huomataan, että 5–6 viikkona ohjaukseen osallistuneet saivat keskimäärin 1,6 kirjoituspistettä enemmän kuin ohjauksessa 0–2 viikkona olleet opiskelijat. Muuttujien välillä on heikko positiivinen korrelaatio (r=0,21), joka on tilastollisesti melkein merkitsevä (p=0,016). Tarkasteltaessa matematiikan kirjoittamista kriteereittäin huomataan, että ohjaukseen 3–6 viikkona osallistuneet menestyivät matemaattisen kirjoittamisen arvioinnissa jokaisessa kriteerissä keskimäärin paremmin kuin 0–2 viikkona ohjaukseen osallistuneet kanssaopiskelijat. Ainoana poikkeuksena tähän on kriteeri 10, jonka perusteella eniten ohjaukseen osallistuneet käyttivät eniten kurssin ulkopuolisia tai omia matemaattisia merkintöjään. Ohjaukseen osallistumisen vaikutus matemaattiseen osaamiseen näkyy, joskin heikosti, siis matematiikan kirjoittamisessa. Tämä on tehostetun kisällioppimisen menetelmän kannalta mielenkiintoista. Olisi kiinnostavaa tutkia, miten erityisesti tämän tutkimuksen osa-alueen tulokset muuttuisivat nykyään käytössä olevilla ohjaukseen osallistumista koskevilla kysymyksillä.

Ohjaukseen aktiivisesti osallistuneet opiskelijat palauttivat enemmän kurssitehtäviä ja näin ollen saivat enemmän lisäpisteitä kuin ohjaukseen vähemmän osallistuneet kanssaopiskelijansa. Kurssin aikana joka viikko ohjaukseen osallistunut opiskelija sai keskimäärin 3,18 lisäpistettä enemmän kuin opiskelija, joka ei osallistunut ohjaukseen laisinkaan. Ohjaukseen osallistumisen ja kurssitehtävistä saatujen lisäpisteiden välinen kohtalainen positiivinen korrelaatio ($r=0,32$) on tilastollisesti erittäin merkitsevä ($p<0,001$). Kuten edellä todettiin, ohjaukseen osallistuu todennäköisesti monentasoisia opiskelijoita. Tästä syystä ohjaukseen osallistumisen ja kurssikokeen välinen korrelaatio jää tilastollisessa valossa heikoksi. On mahdollista, että ohjaukseen osallistuminen auttaa opiskelijoita suoriutumaan kurssikokeesta paremmin kuin ilman ohjausta. Nämä mahdolliset oppimistulokset, jotka eivät tässä tutkimuksessa näkyneet kurssikokeessa menestymisessä, saattavat näkyä myöhemmillä matematiikan kursseilla. Tämän toteamiseksi vaaditaan kuitenkin uusia tutkimuksia.

Yhteenvetona voidaan sanoa, että tutkimus antoi lisätietoa tehostetun kisällioppimisen menetelmästä ja sen vaikuttavuudesta matematiikan yliopisto-opetuksessa. Sekä kurssitehtävien tekemisen ja kurssikokeessa menestymisen että kurssitehtävien tekemisen ja matematiikan kirjoittamisen arvioinnissa menestymisen väliset yhteydet ovat positiivisia. Molemmissa tapauksissa muuttujien välinen korrelaatio oli vahva ja riippuvuus tilastollisesti erittäin merkitsevää. Kurssitehtävien tekemisen ja ohjaukseen osallistumisen välinen suhde ei ollut yhtä selkeästi havaittavissa. Ohjaukseen osallistumisen ja kurssikokeessa menestymisen välillä ei ole tilastollista riippuvuutta. Ohjaukseen osallistuneet opiskelijat saivat kuitenkin hieman parempia pisteitä matematiikan kirjoittamisesta. Muuttujien välinen korrelaatio on heikko, mutta tilastollisesti melkein merkitsevä ($p=0,016$). Ohjaukseen aktiivisesti osallistuneet opiskelijat saivat kuitenkin keskimäärin 40 prosenttia enemmän kurssitehtäviä tehdyksi kuin ohjauksen kokonaan osallistumatta jättäneet opiskelijat. Onkin todennäköistä, että kurssitehtäviä tekemällä oppii matematiikkaa – tämän puolesta puhuvat sekä kurssikokeen että matematiikan kirjoittamisen arviointi. Ohjaukseen osallistumisen vaikuttavuus ei näy suoraan kurssikokeella arvioidussa osaamisessa. Tämä voi osaltaan johtua siitä, että ohjaukseen osallistumista koskeva kysymys oli epäonnistunut. Viitteitä ohjauksen positiivisista vaikutuksista saatiin kuitenkin matematiikan kirjoittamisen arvioinnin kautta. Lisäksi ohjaukseen osallistumalla opiskelijat saivat tehtyä enemmän kurssitehtäviä, jotka ovat edellä esitetyin perustein keskeisiä matemaattisen sisällön haltuun ottamisen prosessissa. Näitä tutkimustuloksia voidaankin hyödyntää jatkossa kisällikurssien suunnittelussa ja toteutuksessa.

Tätä tutkimusta varten luotu matematiikan kirjoittamisen arviointikriteeristö vaikuttaa tutkimustulosten ja käytettävyyden perusteella toimivalta mittarilta. Jatkotutkimusta kuitenkin tarvitaan, jotta voidaan varmistua kriteeristön soveltuvuudesta matematiikan syvällisen ja kokonaisvaltaisemman ymmärtämisen tutkimiseen. Saatujen tutkimustulosten valossa olisi mielenkiintoista myös tutkia, miten tutkimukseen osallistuneet opiskelijat pärjäävät tulevissa opinnoissaan. Näkökulmina tulevissa tutkimuksissa voisivat olla sekä matematiikan sisällöllinen osaaminen että laajemmat matemaattiseen lukutaitoon liittyvät osa-alueet.

Kuten sekä Adu-Gyamfi kumppaneineen (2010) että McCormick (2010) toteavat, matemaattisen osaamisen arvioinnissa käytetään valitettavan vähän kielellisiä elementtejä. Adu-Gyamfi kumppaneineen (2010) myös huomauttaa, että silloinkin kun kielentäminen on läsnä matematiikan opetuksessa, se yleensä tarkoittaa tiedon poimimista tai sen vastaanottamista tekstistä tai opettajalta, ei niinkään välinettä matematiikan ymmärtämisen esille tuomiseen. Kuitenkin esimerkiksi Joutsenlahden (2010) tutkimat opiskelijat olivat sitä mieltä, että kirjallisen kielentämisen malleja pitäisi opettaa systemaattisesti matematiikan tunneilla. McCormickin (2010) mukaan matematiikan kirjoittaminen helpottaa oppimista, ymmärtämistä ja asian palauttamista mieleen myöhemmin. Tämän tutkimuksen tulosten perusteella tehostetun kisällioppimisen menetelmällä on potentiaalia matematiikan kirjoittamisen oppimiseen. Ottamalla kirjoittaminen ja muut kielelliset elementit keskeiseen rooliin opetuksessa on mahdollista lisätä kokonaisvaltaisempaa syvempää matemaattista ymmärrystä (McCormick, 2010). Näin ollen on perusteltua vieläkin aktiivisemmin pohtia matematiikan kirjoittamisen ottamista osaksi arviointia sekä kielellisten elementtien integroimista tehostetun kisällioppimisen menetelmään. Krusselin (1998) huoli matemaattisen lukutaidottomuuden yleisyydestä sekä sen hyväksyttävyydestä on edelleen ajankohtainen. Kysymys kuuluukin, onko matematiikalla ja matemaattisella lukutaidolla eväitä aktiivisemman ja osallistavamman yhteiskunnan rakennuspalikoiksi.

7 Lähteet

Adu-Gyamfi, K., Bossé, M.J. & Faulconer, J. (2010). Assessing understanding through reading and writing in mathematics. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning.* ISSN-1473-0111.

Aspinwall, L. & Aspinwall, J.S. (2003). Investigating mathematical thinking using open writing prompts. *Mathematics Teaching in the Middle School, 8(7)*, 350-353.

Barlow, A.T. & Drake, J.M. (2008). Assessing understanding through problem writing. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13(6)*, 326-332.

Biggs, J. (2003). *Teaching for quality learning at university. What the student does.* Second Edition. The Society for Research into Higher Education & Open University Press, Berkshire & New York.

Bloom, B.S. (1984). The 2 sigma problem: The search for methods of group instruction as effective as one-to-one tutoring. *Educational Researcher, 13(6)*, 4-16.

Bereiter, C. & Scardamalia, M. (1989). Intentional learning as a goal of instruction. *Knowing, learning and instruction. Essays in honor of Robert Glaser (toim. L.B. Glaser)*, 361–392. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Collins, A., Brown, J. & Holum, A. (1991). Cognitive apprenticeship: Making thinking visible. *American Educator, 15(3)*, 6-46.

Collins, A., Brown, J.S. & Newman, S.E. (1987). Cognitive apprenticeship: Teaching the craft of reading, writing and mathematics. *Centre for the Study of Reading, Technical Report No. 403*. University of Illinois.

Drake, J.M. & Barlow, A.T. (2007). Assessing students' levels of understanding multiplication through problem writing. *Teaching Children Mathematics*, December 2007/January 2008, 272-277.

Freitag, M. (1997). Reading and writing in in the mathematics classroom. *The Mathematical Educator, 8(1)*, 16-21.

Gillman, L. (1978). *Writing mathematics well. A manual for authors.* The Mathematical Association of America.

Griffiths, P.A. (2000). Mathematics as the turn of the millennium. *American Mathematical Monthly, 107*, 1-14.

Halliday, M.A.K. (1978). *Language as social semiotic. The social interpretation of language and meaning*. London: Edward Arnold.

Harel, G., & Sowder, L (2007). Toward a comprehensive perspective on proof. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (toim. F. Lester).* National Council of Teachers of Mathematics.

Haswell, R.H. & Haswell, J.T. (1996). Gender bias and critique of student writing. *Assessing Writing, 3(1)*, 31-83.

Hautala, T. (2010). Guidance tutoring — guidance and support in the first steps of studies. *Newsletter of the Community for Undergraduate Learning in the Mathematical Sciences, 1*, 15-20.

Hautala, T., Romu, T., Rämö, J. & Vikberg, T. (2012). The extreme apprenticeship method in teaching university-level mathematics. In *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education.* July 8-15, 2012, Seoul, Korea. International Commission on Mathematical Instruction (ICMI).

Heikkilä, T. (1998). *Tilastollinen tutkimus.* 5. uudistettu painos. Edita Prima Oy, Helsinki.

Helsingin yliopisto. (2012). *Helsingin yliopiston opetuksen ja opintojen eettiset periaatteet.* Unigrafia, Helsinki.

Inglis, M. (2011). Proof in mathematics education: research, learning and teaching. *Research in Mathematics Education, 13(3)*, 316-320.

Joutsenlahti, J. (2003). Kielentäminen matematiikan opiskelussa. *Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta (Ainedidaktinen symposium 7.2.2003) (toim. Arja Virta ja Outi Marttila).* Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisuja. Turun opettajankoulutuslaitos. Turku. 188-196.

Joutsenlahti, J. (2010). Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa. *Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa (toim. Asikainen, M., Hirvonen, P.E. & Sormunen, K.).* Reports and Studies in Education, Humanities, and Theology. Itä-Suomen yliopisto. Joensuu. 3-15.

Joutsenlahti, J., Sarikka, H., Kangas, J. & Harjulehto, P. (2013). Matematiikan kirjallinen kielentäminen yliopiston matematiikan opetuksessa. *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimusseuran konferenssijulkaisu 2012 (toim. Hähkiöniemi, M., Leppäaho, H., Nieminen, P. & Viiri, J.).* Opettajankoulutuslaitos. Tutkimusjulkaisuja. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä. 59-70.

Ketonen, O. (1984). Yksilö kasvatuksen kynnöksessä. Julkaisematon käsikirjoitus. Tapani Sihvolan kotiarkisto.

Ko, Y. & Knuth, E. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *Journal of Mathematical Behavior, 28*, 68-77.

Krussel, L. (1998). Teaching the language of mathematics. *The Mathematics Teacher, 91(5)*, 436-441.

Kurhila, J. & Vihavainen, A. (2011). Management, structures and tools to scale up personal advising in large programming courses. In *Proceedings of the 2011 conference on Information technology education, SIGITE '11*, 3-8, New York, NY, USA. ACM.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legimate peripheral participation.* Cambridge University Press, Cambridge.

Lehtonen, J. (toim.). (2011). Sukupuolinäkökulmia tutkimusperustaiseen opettajankoulutukseen. *Tasa-arvo- ja sukupuolitietoisuus opettajankoulutuksessa -projektin julkaisu.* Helsinki: Helsingin yliopisto.

Lindblom-Ylänne, S. & Nevgi, A. (toim.). (2009). *Yliopisto-opettajan käsikirja.* WSOYpro Oy, Helsinki.

Lipscomb, L., Swanson, J. & West, A. (2004). Scaffolding. *Emerging perspectives on learning, teaching, and technology (toim. M. Orey).* Haettu 1. maaliskuuta 2015 osoitteesta `http://epltt.coe.uga.edu/`

Lähteenoja, S. (2010). *Uusien opiskelijoiden integroituminen yliopistoon. Sosiaalipsykologinen näkökulma.* Väitöskirja. Helsingin yliopiston sosiaalipsykologian oppiaine. Yliopistopaino, Helsinki.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1985). *Thinking mathematically.* Addison-Wesley, 95–99.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos. (2007). *Toimintakäsikirja.* Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta, Helsingin yliopisto.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos. (2013). Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I. Kurssin kotisivut. Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta, Helsingin yliopisto. Haettu 1. maaliskuuta 2015 osoitteesta `https://wiki.helsinki.fi/display/mathstatKurssit/Lineaarialgebra+ja+matriisilaskenta+I+ja+II%2C+Perusvalmiudet`

McCormick, K. (2010). Experiencing the power of learning mathematics through writing. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal. 4(Curriculum)*, September 2010.

McIntosh, M. & Draper, R. (2001). Using learning logs in mathematics: Writing to learn. *Mathematics Teacher, 94(7)*, 554–557.

Metsämuuronen, J. (2009). *Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä.* Tutkijalaitos. 4. laitos, 1. painos. Gummerus Kirjapaino Oy, Jyväskylä.

National Council of Teachers of Mathematics. (2010). *Princilpes and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.

Oikkonen, J. (2009). Ideas and results in teaching beginning maths students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40(1)*, 127-138.

Orr, J.M., Sackett, P.R. & DuBois, C.L.Z. (1991). Outlier detection and treatment in I/O Psychology: A survey of researcher beliefs and an empirical illustration. *Personnel Psychology, 44*, 473-486.

Osborne, J.W. & Overbay, A. (2004). The power of outliers (and why researchers should always check for them). *Practical Assessment, Research & Evaluation, 9(6).*

Peura, P. (2012). Tehottoman ja epätasa-arvoisen opetuskulttuurin haastaja: mastery learning -menetelmä kaventaa osaamistasokuilua. Haettu 1. maaliskuuta 2015 osoitteesta `http://maot.fi/_wp/wp-content/uploads/2012/05/Mastery-learning.pdf`

Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically: communication in mathematics classrooms. Language, education and society*. London: Routledge & Kegan Paul.

Pugalee, D. K. (2001): Writing, mathematics, and metacognition: Looking for connections through students' work in mathematical problem solving. *School Science and Mathematics. 101(5)*, 236-245.

Raman, M. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof? *Educational Studies in Mathematics, 52*, 319–325.

Read, B., Francis, B. & Robson, J. (2005). Gender, 'bias', assessment and feedback: Analyzing the written assessment of undergraduate history essays. *Assessment & Evaluation in Higher Education, 30(3)*, 241-260.

Rämö, J., Oinonen, J. & Vikberg, T. (2014). Emphasising conceptual understanding in undergraduate mathematics. *9th congress of European Research in Mathematics Education*, 4–8 helmikuuta 2015, Praha, Tsekki.

Rämö, J., & Vikberg, T. (2014). Extreme Apprenticeship – Engaging undergraduate students on a mathematics course [Special issue]. *European Journal of Science and Mathematics Education, 2*.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving.* Academic Press, New York.

Schoenfeld, A. (1989). Ideas in the air: Speculations on small group learning, environmental and cultural influences on cognition, and epistemology. *International Journal of Educational Research, 13(1)*, 71-88.

Selden, A. & Selden, J. (2003). Validation of proof considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education, 34(1)*, 4-36.

Sfard, A. (2000). On reform movement and the limits of mathematical discourse. *Mathematical Thinking and Learning, 2(3)*, 157–189.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*, 289–321.

Usiskin, Z. (1996). Mathematics as a Language. In *Communication in Mathematics, K–12 and Beyond, 1996 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), (toim. Portia C. Elliott and Margaret J. Kenney).* Reston, Va.: NCTM, 1996. 231–243.

Vihavainen A., Paksula M. & Luukkainen M. (2011a). Extreme apprenticeship method in teaching programming for beginners. In *Proceedings of the 42nd ACM technical symposium on Computer science education, SIGCSE '11*, 93–98, New York, NY, USA. ACM.

Vihavainen, A., Paksula, M, Luukkainen M, & Kurhila, J. (2011b). Extreme apprenticeship method: key practices and upward scalability. In *Proceedings of the 16th annual joint conference on Innovation and technology in computer science education, ITiCSE '11*, 273–277, New York, NY, USA. ACM.

Vikberg, T. (2012). *Teaching an introductory course in logic to undergraduate students using extreme apprenticeship method.* Pro gradu –tutkielma. Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto, Helsinki.

Vosniadou, S., Ioannides, C., Dimitrakopoulou, A. & Papademetriou, E. (2001). Designing learning environments to promote conceptual change in science. *Learning and Instruction, 11*, 381-419.

Vygotsky, L. S. (1931). *Ajattelu ja kieli.* Weilin+Göös. Espoo 1982.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wagner, D. (2009). If mathematics is a language, how do you swear in it? *The Montana Mathematical Enthusiast (TMME), 6(3)*, 449-458.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 101-119.

Weber, K. & Mejia-Ramos, J. P. (2011). Why and how mathematicians read proofs: An exploratory study. *Educational Studies in Mathematics, 76*, 329-344.

Yliopistolaki. 24.7.2009/558 muutoksineen.

Yore,L. D., Pimm, D. & Tuan, H. (2007). The literacy component of mathematical and scientific literacy. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5(4)*, 556-589.